

EGÍDIO TURCHI DE FREITAS

ABORDAGEM ROBUSTA APLICADA
AO PROBLEMA DE SELEÇÃO DE PORTFÓLIO

Trabalho de Formatura apresentado
à Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção do
diploma de Engenheiro de Produção.

São Paulo, 2009

EGÍDIO TURCHI DE FREITAS

ABORDAGEM ROBUSTA APLICADA AO
PROBLEMA DE SELEÇÃO DE PORTFÓLIO

Trabalho de Formatura apresentado
à Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção do
diploma de Engenheiro de Produção.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Celma de Oliveira Ribeiro

São Paulo, 2009

Ficha Catalográfica

Freitas, Egídio Turchi de

Abordagem Robusta aplicada ao problema de seleção de portfólio/ Egídio Turchi de Freitas. – São Paulo, 2009.

92p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1.Pesquisa operacional 2.Otimização Robusta 3. Finanças
4. Gestão de Portfólio 1. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II.t.

*Dedico este trabalho
à minha família*

AGRADECIMENTOS

À Prof^a. Dr^a. Celma de Oliveira Ribeiro pela constante orientação e pelo compartilhamento de conhecimentos que foram fundamentais no desenvolvimento deste trabalho de formatura.

Aos meus pais e irmão pelo carinho e apoio em todas as horas.

Aos amigos que fiz na faculdade e espero levar para toda a vida.

RESUMO

O trabalho propõe a utilização de otimização robusta para reduzir a dependência de um modelo de seleção de portfólios ao retorno esperado para os ativos. O modelo de otimização utiliza o CVaR como medida de risco e são definidas duas contrapartes robustas, com base nas abordagens de Soyster (1973) e de Betsimas e Sim (2004). Por meio da definição de cenários futuros, faz-se a análise da sensibilidade do modelo original à estimativa de retorno futuro dos ativos. Os modelos de otimização robusta são aplicados à seleção de uma carteira de ações do mercado brasileiro.

Palavras-chave: Pesquisa Operacional. Otimização Robusta. Finanças. Gestão de Portfólio.

ABSTRACT

This graduation thesis proposes the use of robust optimization techniques to deal with uncertainty in portfolio selection models. In the optimization model, CVaR is used as risk measure and two robust counterparts are built through Soyster's (1973) and Bertsimas e Sim's (2004) approaches. The robust counterpart is compared to the original model through the definition of future scenarios. A case study for the Brazilian stock market is performed to analyze the performance of the robust counterpart.

Keywords: Operational Research. Robust Optimization. Finance. Portfolio Management.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Variações de F para diferentes valores ϵ	23
Gráfico 2. Fronteira eficiente	33
Gráfico 3. Comparação CVaR e VaR.....	37
Gráfico 4. Preço Ações PETR4	53
Gráfico 5. Preço Ações VALE5	53
Gráfico 6. Preço Ações BBDC4	54
Gráfico 7. Preço Ações BRTO4	54
Gráfico 8. Preço Ações LAME4	54
Gráfico 9. Simulação Preços PETR4.....	56
Gráfico 10. Simulação Preços VALE5.....	57
Gráfico 11. Simulação Preços BBDC4	57
Gráfico 12. Simulação Preços BRTO4.....	57
Gráfico 13. Simulação Preços LAME4	58
Gráfico 14. Relações de risco-retorno modelo de Markowitz tomando cenário 1 como base	61
Gráfico 15. Relações de risco-retorno modelo de Markowitz tomando cenário 2 como base	61
Gráfico 16. Relações de risco-retorno modelo de Markowitz tomando cenário 3 como base	62
Gráfico 17. Relações de risco-retorno modelo CVaR tomando cenário 1 como base	65
Gráfico 18. Relações de risco-retorno modelo CVaR tomando cenário 2 como base	65
Gráfico 19. Relações de risco-retorno modelo CVaR tomando cenário 3 como base	66
Gráfico 20. Relação risco-retorno solução robusta (Soyster) nos diferentes cenários	71

Gráfico 21. Relação risco-retorno solução robusta (Soyster) tomando cenário 1 como base	72
Gráfico 22. Relação risco-retorno solução robusta (Soyster) tomando cenário 2 como base	72
Gráfico 23. Relação risco-retorno solução robusta (Soyster) tomando cenário 3 como base	73
Gráfico 24. Fronteira eficiente modelo robusto (Soyster) para diferentes amplitudes de intervalo do parâmetro retorno	77
Gráfico 25. Fronteira eficiente para diferentes valores de Γ	78

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Segmentação empresas listadas Bovespa	51
Tabela 2. Ativos Portfólio	52
Tabela 3. Participação Vale e Petrobrás no Ibovespa.....	53
Tabela 4. Preço Ações (02/01/2008)	56
Tabela 5. Cenários base para estudo da alocação	59
Tabela 6. Matriz de Covariância.....	60
Tabela 7. Relação risco-retorno modelo de Markowitz	63
Tabela 8. Alocação Ótima modelo de Markowitz para diferentes cenários.....	63
Tabela 9. Relação risco-retorno modelo de DiClemente (CVaR).....	67
Tabela 10. Alocação ótima modelo de DiClemente (CVaR) para diferentes cenários	67
Tabela 11. Valores r'_i (centro do intervalo) e s_i (amplitude) por ativo.....	70
Tabela 12. Relação risco-retorno modelo de DiClemente (CVaR) e contraparte robusta (Soyster)	74
Tabela 13. Alocação ótima modelo de DiClemente e da Contraparte Robusta (Soyster) para diferentes cenários e níveis de risco	75
Tabela 14. Valores s_i para diferentes intervalos	76

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
1.1	MOTIVAÇÃO.....	13
1.2	ESTÁGIO	15
1.3	OBJETIVOS	15
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	16
2	CONCEITOS E APLICAÇÕES DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA	18
2.1	AS FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS EM OTIMIZAÇÃO ROBUSTA.....	20
2.2	ALGUMAS APLICAÇÕES DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA	24
2.3	ALGUMAS ABORDAGENS IMPORTANTES EM OTIMIZAÇÃO ROBUSTA	26
2.3.1.	<i>Abordagem de Soyster.....</i>	<i>27</i>
2.3.2.	<i>Abordagem de Ben-Tal e Nemirovski.....</i>	<i>28</i>
2.3.3.	<i>Abordagem de Bertsimas e Sim</i>	<i>29</i>
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
3.1	GESTÃO DE PORTFÓLIO.....	31
3.2	MEDIDAS DE RISCO.....	34
3.2.1.	<i>Variância</i>	<i>34</i>
3.2.2.	<i>VaR.....</i>	<i>35</i>
3.2.3.	<i>CVaR.....</i>	<i>37</i>
4	MODELOS	39
4.1	MODELOS CLÁSSICOS DE SELEÇÃO DE PORTFÓLIO	39
4.1.1.	<i>Modelo de Markowitz.....</i>	<i>39</i>
4.1.2.	<i>Modelo CVaR</i>	<i>41</i>
4.2	MODELOS ROBUSTOS	43
4.2.1.	<i>Modelo de Soyster aplicado à seleção de portfólio</i>	<i>43</i>
4.2.2.	<i>Modelo de Bertsimas e Sim aplicado à seleção de portfólio.....</i>	<i>46</i>
5	SENSIBILIDADE DOS MODELOS DE SELEÇÃO DE PORTFÓLIO AOS PARÂMETROS INCERTOS	50
5.1	ATIVOS QUE IRÃO COMPOR O PORTFÓLIO	50
5.2	CENÁRIOS	55
5.3	ALOCÇÃO EM DIFERENTES CENÁRIOS	59

5.3.1.	<i>Cenários aplicados ao Modelo de Markowitz</i>	60
5.3.2.	<i>Cenários aplicados ao Modelo de DiClemente</i>	64
6	RESULTADOS DOS MODELOS DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA	69
6.1	RESULTADOS MODELO DE SOYSTER	69
6.2	RESULTADOS MODELO DE BERTSIMAS E SIM	77
7	CONCLUSÃO	80
7.1	CONCLUSÕES DO TRABABALHO	80
7.2	FUTURAS EXTENSÕES	82
	BIBLIOGRAFIA	83
	ANEXO I – MODELO DE MARKOWITZ	85
	ANEXO II – MODELO DE DICLEMENTE	86
	ANEXO III – CONTRAPARTE ROBUSTA (SOYSTER)	88
	ANEXO IV – CONTRAPARTE ROBUSTA (BERTSIMAS E SIM)	90

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho de conclusão do curso de engenharia estudaremos a aplicação de otimização robusta em modelos de seleção de portfólio, no intuito de reduzir a sensibilidade dos mesmos às incertezas inerentes ao retorno futuro dos ativos. Apresentaremos a seguir o escopo, os principais objetivos a serem atingidos e a organização do trabalho.

1.1 MOTIVAÇÃO

Segundo Winston (2004), pesquisa operacional consiste em uma abordagem científica para a tomada de decisão, que possibilita a busca de uma solução ótima para a aplicação de recursos escassos, através da representação da realidade via modelos matemáticos.

Nas últimas décadas, a evolução da área de modelagem, juntamente com o rápido incremento da capacidade dos computadores, possibilitou a resolução de complexos modelos matemáticos, revolucionando o estudo de diferentes áreas de conhecimento, como por exemplo, logística, planejamento e controle da produção, finanças, dentre várias outras.

Uma grande gama destes modelos, porém, depende de dados ainda incertos no momento da decisão, como, por exemplo, a demanda de uma empresa, a data em que um fornecedor entregará o pedido e o retorno futuro de determinados ativos.

Como os modelos consistem em uma representação da realidade, no caso da concretização de valores reais diferentes dos inicialmente assumidos para os dados incertos, o resultado obtido pelo modelo de otimização pode violar diversas de suas restrições, resultando assim em um desempenho ruim.

Nos modelos de finanças em particular, essa preocupação com a incerteza em relação aos parâmetros utilizados no modelo é de fundamental importância dada a grande variabilidade e imprevisibilidade em relação ao valor futuro dos ativos.

A partir de 2007, com a crise dos *subprime*, e principalmente em 2008, com auge após a quebra do Banco *Lehman Brothers*, essa imprevisibilidade em relação ao valor futuro dos

ativos financeiros se mostrou ainda mais clara. Investidores em todo o mundo foram pegos de surpresa por uma grande recessão econômica, considerada por muitos economistas como a pior desde a crise de 29. Dessa forma, ficaram claras as dificuldades relativas à previsão sobre os retornos futuros dos ativos.

Beyer e Sendhoff (2007) apresentam vários pontos que ilustram a importância da aplicação de técnicas de otimização robusta, com ênfase para sua relevância em relação a problemas de engenharia:

- A solução ótima do modelo depende da função objetivo e das restrições definidas, porém, como modelos são representações da realidade, a utilização de parâmetros incertos como dados precisos pode levar a resultados que não são realmente a solução ótima, então, a busca por uma grande precisão no modelo poderia gerar uma perda de recursos desnecessária.
- Mesmo que seja possível identificar o valor real dos parâmetros e consequentemente sua solução ótima, talvez não seja possível implementá-la por impossibilidades operacionais, ou não valha a pena pelo custo excessivo, como, por exemplo, em processos de manufatura, que demandem uma precisão muito grande.
- Modelos de otimização são definidos de maneira estática, porém, em problemas de engenharia boa parte dos parâmetros são dinâmicos, como por exemplo, fatores ambientais tais como temperatura, pressão, propriedades dos materiais ou até mesmo partes de um sistema complexo. Dessa forma, seria de grande importância a definição de modelos que levem em consideração essas variações e que apresentem uma solução robusta para os diferentes cenários.
- As mudanças ao longo dos processos devem ser levadas em consideração, como por exemplo, o desgaste de máquinas ao longo de seu ciclo de vida.

Essa necessidade de tornar os modelos de otimização menos sensíveis aos parâmetros incertos tem se tornado cada vez mais clara, tanto que um grande número de estudos acadêmicos e artigos vêm sendo publicados nos últimos anos, com o intuito de aumentar a robustez de modelos relativos às diversas áreas de engenharia.

1.2 *ESTÁGIO*

A Asset do Banco HSBC administra atualmente, um patrimônio superior a R\$45 bilhões distribuído entre um enorme número de fundos de investimento das mais diferentes classes, incluindo fundos de renda fixa, ações, multimercados, dentre outros. A administração dos fundos é de responsabilidade direta dos gestores de portfólio, porém, as diretrizes gerais das estratégias de investimento são definidas em comitês periódicos.

A área de estratégia e análise quantitativa, local onde este trabalho foi desenvolvido, tem como principal função a análise macro dos mercados de renda fixa e variável para propor investimentos nos diversos ativos. Nesse processo, muitas vezes são utilizados modelos matemáticos no intuito de nortear a tomada de decisão.

Vários desses modelos, porém, acabavam se mostrando muito sensíveis em relação à definição de parâmetros que só podem ser estimados no momento da tomada de decisão, com destaque para a utilização do retorno esperado para os ativos em modelos de média-variância, que podem oscilar devido a uma infinidade de fatores muitas vezes aleatórios. Em função disto, surgiu a demanda por estudar o impacto das incertezas dos parâmetros nos modelos de seleção de portfólio e maneiras de melhorá-los.

Estudando a literatura de finanças e de pesquisa operacional, optamos por aplicar otimização robusta ao problema, não somente por ser este um tema muito atual e discutido nas principais revistas internacionais, mas principalmente por possibilitar um grande leque de aplicações futuras em diversos problemas relativos às mais diferentes áreas de conhecimento da engenharia de produção.

1.3 *OBJETIVOS*

Neste trabalho, nos propomos estudar formas de reduzir a sensibilidade dos modelos às variações nos parâmetros incertos, através da utilização de otimização robusta. Essa área de estudo tem ganhado recentemente grande destaque nos meios acadêmicos devido à

dificuldade de se estimar de maneira efetiva o valor real de diversos parâmetros que são utilizados nos modelos de otimização.

Os conceitos de otimização robusta serão aplicados a modelos de seleção de portfólio, no intuito de reduzir a dependência dos mesmos a variações no resultado futuro dos diferentes ativos.

O foco do trabalho será o desenvolvimento de contrapartes robustas para os modelos clássicos de seleção de portfólio, através da aplicação das metodologias de Soyster (1973) e de Bertsimas e Sim (2004).

Com vistas a analisar a sensibilidade dos modelos clássicos a variações no retorno futuro dos ativos e compará-los com suas contrapartes robustas, utilizaremos uma carteira de ações do mercado brasileiro. Porém, enfatizaremos a análise dos modelos e dos conceitos de otimização robusta e não a definição de uma carteira ótima relativa a toda gama de ativos presentes no mercado brasileiro.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Para organizar o desenvolvimento do tema proposto, este trabalho será dividido em sete partes.

Na introdução, constam os principais pontos que serão discutidos neste trabalho de formatura e os objetivos a serem alcançados.

No segundo capítulo, definiremos os principais conceitos de otimização robusta. Além disso, ilustraremos sua aplicação a problemas clássicos de engenharia de produção, exemplificando com modelos que apresentam parâmetros incertos e desenvolvendo uma compilação de artigos recentes publicados em importantes revistas internacionais, nos quais se busca o aumento da robustez de modelos de engenharia de produção, como por exemplo, planejamento de estoque, dimensionamento de frota de veículos e seleção de projetos.

Uma revisão bibliográfica acerca dos principais conceitos e teorias que darão suporte teórico ao restante do trabalho, com ênfase nas principais medidas de risco, será apresentada no terceiro capítulo.

Dois modelos clássicos de seleção de portfólio serão discutidos no quarto capítulo. O modelo de Markowitz (1952) e o de DiClemente (2002) que utilizam respectivamente a variância e o *Conditional Value at Risk* (CVaR) como medidas de risco. Posteriormente, apresentaremos para o modelo de DiClemente (2002), uma contraparte robusta definida a partir do modelo de Soyster (1973) e desenvolveremos uma contraparte robusta com base no modelo de Bertsimas e Sim (2004).

No quinto capítulo, analisaremos a sensibilidade dos modelos clássicos de seleção de portfólio a variações nos parâmetros retorno. Para isso, aplicaremos esses modelos a um problema real de seleção de ações do mercado brasileiro.

Os resultados computacionais referentes à aplicação das técnicas de otimização robusta aos modelos de seleção de portfólio, serão apresentadas no sexto capítulo.

Por fim, apresentaremos as conclusões deste trabalho.

2 CONCEITOS E APLICAÇÕES DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

A busca pela otimização de sistemas complexos está presente nas diversas áreas de estudo da engenharia de produção, como por exemplo, na seleção dos projetos nos quais a empresa investirá; na definição de portfólios de produtos; no planejamento da produção; dentre uma infinidade de outros problemas.

A maior parte desses problemas envolve uma grande quantidade de variáveis, o que dificulta a tomada de decisão. Porém, com o desenvolvimento dos computadores tornou-se mais fácil a solução de modelos de otimização, os quais buscam determinar as variáveis de decisão de forma a gerar o melhor valor possível para a função objetivo, respeitando as restrições relativas ao problema.

Apesar de os modelos matemáticos possibilitarem a definição ótima das variáveis de decisão, muitas vezes, na tentativa de representar a realidade através destes modelos, temos que atribuir valores para parâmetros que não podem ser definidos com precisão ou que até mesmo são incertos no momento de tomada de decisão. A título de ilustração, considere os seguintes problemas (WINSTON, 2004).

Alocação de capital em diferentes investimentos

Uma empresa tem que decidir de que forma vai alocar seu capital entre diferentes projetos, podendo financiar uma parcela de cada investimento, definindo assim sua participação no projeto e conseqüentemente seu percentual no retorno futuro. O modelo que representa este problema apresenta como função objetivo a maximização do valor presente dos investimentos, de tal forma que o desembolso de capital não seja maior do que um valor máximo que a empresa possa investir.

Nesse problema, apesar de o retorno sobre o investimento ser tratado como um parâmetro de valor conhecido, em vários tipos de projetos o mesmo somente pode ser obtido após sua realização, sendo possível apenas estimá-lo. Dessa forma, os valores ótimos do modelo podem não representar a maximização real dos investimentos.

Planejamento de produção

Uma empresa possui n produtos em seu portfólio e deve decidir o número de produtos de cada tipo a serem produzidos de forma a maximizar o retorno total. Porém, devem ser atendidas as restrições relativas ao número de horas de trabalho disponíveis, quantidade de matéria prima e quantidade mínima de cada produto que deve ser produzida.

Nesse modelo, o tempo gasto na produção de cada produto é considerado como um parâmetro definido e essa é uma boa hipótese em processos de manufatura industrializados. Porém, em processos mais manuais esse tempo de produção pode variar muito dependendo da produtividade do trabalhador, o que poderia resultar em um desempenho ruim da solução ótima devido ao não cumprimento das restrições.

Assim como nos exemplos citados, existe uma infinidade de problemas de engenharia de produção que apresentam parâmetros incertos, o que pode causar mudanças consideráveis à solução ótima do problema conforme os parâmetros são modificados. As abordagens convencionais para o tratamento da incerteza consistem em empregar análise de sensibilidade ou mesmo otimização estocástica. A otimização estocástica consiste basicamente na definição de restrições ao modelo matemático, tomando por base a distribuição probabilística dos parâmetros incertos. Essa metodologia possui dois problemas, primeiro a dificuldade de se saber a real distribuição dos parâmetros incertos e segundo, mesmo que se conheça essa distribuição, a grande dimensão do problema resultante poderá gerar dificuldades do ponto de vista computacional.

A otimização robusta, técnica que estudaremos neste trabalho, também tenta resolver os problemas relativos à incerteza das informações utilizadas nos modelos de otimização, assim como na otimização estocástica, porém, sem que haja necessidade de se conhecer precisamente a distribuição dos parâmetros incertos, levando assim, a problemas de otimização com menor custo computacional. A literatura acadêmica recente tem buscado apresentar soluções para o tratamento de problemas de otimização com parâmetros incertos através de técnicas de otimização robusta. Genericamente essas técnicas buscam encontrar soluções para os problemas de otimização, que forneçam bons resultados para os diferentes valores possíveis de serem assumidos pelos parâmetros incertos.

Em survey de 2007 Beyer e Sendhoff (2007) conceituam de maneira abrangente conceitos de otimização robusta e estabelecem um paralelo interessante com a filosofia de Taguchi. Com foco no estudo de parâmetros em problemas de *design*, porém, discutindo conceitos fundamentais de otimização robusta, os autores defendem que a própria origem da otimização robusta está ligada a conceitos de engenharia, tendo suas raízes na filosofia de Taguchi, em sua tentativa de inserir incertezas no contexto do controle da qualidade. Beyer e Sendhoff (2007) argumentam que Taguchi, ao definir parâmetros de controle (X) a serem otimizados, e parâmetros de ruído (α), tais como condições ambientais e tolerâncias, que não podem ser controlados pelo designer, definiu as bases para o desenvolvimento de otimização robusta, apesar de em sua teoria, não ter trabalhado com conceitos de otimização, mas sim com o delineamento de experimentos. Os autores destacam que assim como na metodologia proposta por Taguchi, nos problemas de otimização robusta são consideradas as incertezas nos parâmetros, ao contrário dos problemas clássicos de otimização.

2.1 AS FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS EM OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

Em geral, consideram-se dois tipos de fontes de incerteza em problemas de otimização: incerteza nas restrições e na função objetivo. No primeiro caso, a variação dos parâmetros do modelo pode ocasionar a perda de viabilidade de soluções, enquanto que no segundo variações nos parâmetros da função objetivo podem levar a que soluções consideradas ótimas fiquem muito distantes da melhor solução.

O problema clássico de otimização consiste em minimizar (ou maximizar) a função objetivo, obedecendo a um conjunto de restrições:

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{aligned}$$

As incertezas podem se encontrar tanto na função objetivo $f(x, \alpha)$, quanto nas restrições de desigualdade $g(x, \alpha)$ ou de igualdade $h(x, \alpha)$, sendo X a variável de decisão (correspondente à variável de controle na abordagem Taguchi) e α as incertezas relativas aos parâmetros. O problema robusto, no caso em que as incertezas ocorrem na função objetivo, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \min F(x, \alpha) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \\ & \alpha \in \Omega \end{aligned}$$

Sendo Ω o conjunto que defini as incertezas.

A resolução dos problemas levando em consideração as incertezas nos parâmetros se torna muito mais complexa do que a simples resolução dos modelos determinísticos. Um possível tratamento para o problema consiste em analisar o pior caso, ou seja, determinar a solução que minimiza a maior função objetivo possível quando consideradas todas as possíveis instâncias do problema. Rustem e Howe (2002) consideram que a definição do modelo de maneira robusta parte do conceito minimax, ou seja, a minimização da perda máxima possível.

Dessa forma, para minimizar de maneira robusta uma função $f(x, \alpha)$ com incertezas α que podem oscilar num conjunto Ω , recai-se no problema:

$$\begin{aligned} & \min_x F(x, \alpha) \\ & F(x, \alpha) = \max_{\alpha \in \Omega} \{f(x, \alpha)\} \end{aligned}$$

Em geral se estuda casos particulares do conjunto Ω , buscando-se explorar a estrutura do problema. Por exemplo, no caso discreto, no qual há um número finito de cenários, considera-se:

$$\min_x F(x, \alpha)$$

em que $F(x, \alpha) = \max \{f(x, \alpha) \mid \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m^{\text{cenários}}\}\}$

Já para um conjunto Ω contínuo, com intervalo do tipo $[\alpha' - \epsilon, \alpha' + \epsilon]$, a resolução do modelo recai no seguinte problema:

$$\min_x F(x, \alpha)$$

$$F(x, \alpha) = \max_{\alpha} \{f(x, \alpha) \mid \alpha' - \epsilon \leq \alpha \leq \alpha' + \epsilon\}$$

Embora a resolução do problema em que se considera intervalos contínuos seja mais complexa, optamos pelo seu estudo devido à natureza do problema considerado.

Dessa forma, a partir da aplicação do problema minimax ao modelo original, podemos desenvolver uma contraparte robusta que apresente menor sensibilidade à variação nos parâmetros incertos. No entanto, a resolução deste problema envolve complexos algoritmos matemáticos, conforme apresentado no livro *Algorithms for Worst-case Design and Applications to Risk Management* (RUSTEM; HOWE, 2002).

O conceito de pior cenário possível e a importância da aplicação de otimização robusta podem ser ilustrados pelo seguinte exemplo apresentado por Beyer e Sendhoff (2007), apesar da simplicidade do mesmo.

Considere a seguinte função unidimensional:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x^{1/2}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Assuma que dada a decisão x , o resultado real pode oscilar num intervalo $\xi \in [x - \epsilon, x + \epsilon]$, como ocorreria, por exemplo, na definição de algum parâmetro de *design*, caso o processo de manufatura apresentasse intervalos de precisão.

A contraparte robusta da função $f(x)$ a ser minimizada, pode ser representada por:

$$F(x, \epsilon) = \max_{\xi} \{f(\xi) | x - \epsilon \leq \xi \leq x + \epsilon\}$$

No gráfico 1, retirado do artigo, podemos ver que dependendo do parâmetro ϵ a solução considerada ótima no modelo original pode sofrer uma grande deterioração no resultado, apresentando desempenho ruim. De baixo para cima, temos as funções F relativas respectivamente aos parâmetros $\epsilon = 0; 0,5; 1$ e 2 .

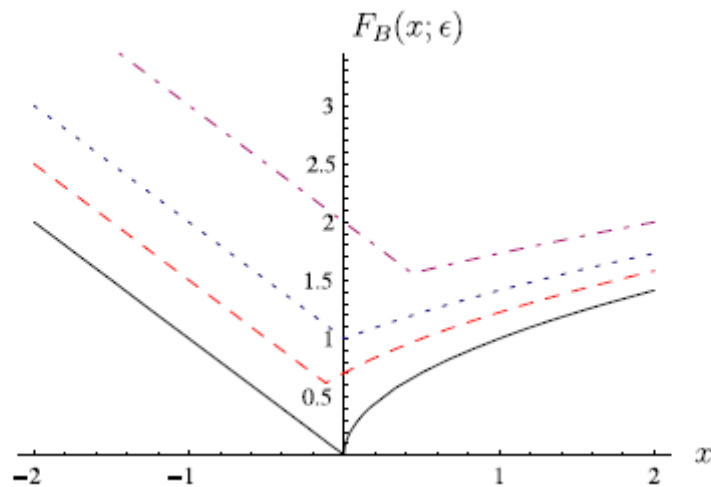


Gráfico 1. Variações de F para diferentes valores ϵ

Fonte: **BEYER, H.G. e SENDHOFF, B.**, (2007). Robust Optimization – A comprehensive survey, *Computer methods in applied mechanics and engineering*

Observe que através da utilização de técnicas de otimização robusta, aceitamos uma solução sub-ótima em relação ao valor nominal estimado para as variáveis, mas garantimos a factibilidade e uma solução mais próxima do ótimo, caso os parâmetros mudem.

Além disso, em qualquer cenário pertencente ao intervalo definido para os parâmetros incertos, a solução robusta terá desempenho superior em relação ao pior cenário possível. Essa robustez do problema minimax advém do fato de que de maneira simultânea definimos a melhor estratégia correspondente ao pior cenário possível.

2.2 ALGUMAS APLICAÇÕES DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

A seguir, destacamos algumas interessantes aplicações de otimização robusta em diferentes tipos de problemas relacionados à engenharia de produção, englobando desde o dimensionamento de frotas de transporte, decisões de estoque até o planejamento de colheita.

Uma aplicação de técnicas de otimização robusta a um problema de dimensionamento de frota de veículos é apresentado por List et al (2003) no artigo “*Robust optimization for fleet planning under uncertainty*”. Devido ao longo período de utilização dos veículos, existem incertezas consideráveis acerca da demanda que irão atender ao longo de sua vida útil e as condições sobre as quais irão operar. Porém, apesar do grande impacto dessas incertezas nas decisões sobre o dimensionamento das frotas, a maior parte dos modelos são definidos de maneira determinística, devido à dificuldade de resolução desses problemas.

No modelo apresentado pelos autores, as incertezas se mostram claras em relação aos seguintes parâmetros: aspectos espaciais e temporais da demanda futura e no tempo de viagem e produtividade da frota. Porém, através da aplicação de otimização robusta tornou-se possível inserir as incertezas no modelo, tornando o mesmo menos sensível a variações nos parâmetros demanda e produtividade.

Já no artigo “*Preference programming for robust portfolio modeling and project selection*” Liesio; Mild e Salo (2007) apresentam um problema de seleção de m projetos com base em n critérios. A cada critério é atribuído um peso w e cada projeto demanda certo investimento. No modelo apresentado, busca-se maximizar a soma dos critérios individuais relativos a cada projeto, mas respeitando o orçamento total disponível para investimento.

Este problema poderia ser resolvido de maneira determinística, porém, citando Archer e Ghasemzadeh (1999) dentre outros, os autores do artigo indicam que a definição de intervalos

para o peso dos critérios e para as notas dos projetos é mais bem aceita pelos especialistas que fornecerão os inputs do modelo e geram resultados melhores. Através da utilização de técnicas de otimização robusta, os autores inserem no modelo as incertezas em relação aos parâmetros relativos aos pesos e à pontuação atribuída aos projetos em cada critério.

A decisão sobre estoques, outro problema clássico de engenharia de produção, é discutido por Jammerneegg e Kischka (2009) no artigo “*Risk preferences and robust inventory decision*”, com foco no modelo *newsvendor*. Neste modelo, o varejista só tem uma oportunidade de fazer o pedido para seu fornecedor e o mesmo deve ser feito antes que a demanda seja conhecida ao certo, dado que o período de vendas acontecerá posteriormente ao pedido dos produtos para composição do estoque. Cada produto é comprado a um preço c e vendido a um preço p durante o período de vendas e a um preço z caso sobre no estoque, sendo que $p > c > z$. Além disso, a demanda insatisfeita é perdida.

No modelo *newsvendor*, não é levado em consideração o impacto da incerteza em relação à demanda esperada, apesar de que a mesma pode sofrer grande alteração entre o período de composição do estoque e o período de venda dos produtos. Para inserir essas incertezas no modelo, os autores transformaram a função de maximização dos lucros em um problema maximin, de forma a definir a solução que maximiza o retorno no pior cenário possível.

A importância da otimização robusta para tratar as incertezas em modelos de otimização, também é apresentada no artigo “*A robust optimization approach to wine grape harvesting scheduling*”. Nesse artigo, Bohle et al. (2009) aplicam otimização robusta para tornar o modelo de programação da colheita de uvas menos sensível a variações em parâmetros incertos.

O foco do modelo apresentado no artigo é balancear o risco de investimento acima do necessário, com o risco de produtividade inferior ao esperado, levando a uma colheita mais lenta e conseqüente redução na qualidade do vinho que está diretamente relacionada à colheita no tempo certo. Nesse problema, o número de trabalhadores a serem alocados para a colheita em diferentes blocos e períodos é a principal variável de decisão, pois considerando uma certa produtividade, o volume de uvas colhidas depende somente do número de trabalhadores contratados.

O modelo, porém, apresenta diversos parâmetros incertos que podem impactar no desempenho da solução considerada ótima. No estudo, os autores destacam a produtividade

da colheita manual, que pode variar tanto por questões individuais relativas a cada trabalhador, quanto por fatores climáticos ou geográficos.

Através da aplicação de técnicas de otimização robusta, Bohle et al. (2009) aumentaram a robustez do modelo em relação ao parâmetro produtividade, porém, sem torná-lo extremamente conservador. Um dos modelos de otimização robusta utilizado no artigo foi o de Bertsimas e Sim (2004), o qual também será utilizado neste trabalho de formatura.

Assim como nos artigos apresentados, existe uma vasta gama de trabalhos acadêmicos¹, nos quais são aplicadas técnicas de otimização robusta em modelos relativos a diversas áreas de estudo da engenharia de produção.

Neste trabalho, aplicaremos a otimização robusta na minimização da sensibilidade de modelos de seleção de portfólio ao retorno esperado para os ativos. A relevância deste estudo está apoiada na atualidade do tema, nas incertezas inerentes aos modelos de seleção de portfólio e na aplicabilidade desses conhecimentos na engenharia de produção. O foco principal, portanto, é no estudo da otimização robusta, de modo que os modelos e ferramentas a serem desenvolvidos possam ser adaptados para aplicação em outras áreas do conhecimento.

2.3 *ALGUMAS ABORDAGENS IMPORTANTES EM OTIMIZAÇÃO ROBUSTA*

No intuito de tornar as restrições do modelo factíveis não somente em relação ao valor esperado para os parâmetros incertos, mas sim para todo um intervalo no qual estes parâmetros possam oscilar, as técnicas de otimização robusta definem uma contraparte robusta para o problema de otimização.

Conforme explicamos no tópico anterior, a definição dessa contraparte robusta está relacionada ao problema minimax, cuja resolução depende da forma como são definidos os

¹ “Robust Optimization – A comprehensive survey” (Beyer, Sendhoff, 2007); “Robust Capacity Planning Under Uncertainty” (Paraskevopoulos, Karakitsos, Rustem, 1991); “A robust optimization model for stochastic logistic problems” (Yu, Li, 2000); “Production Planning via scenario modeling” (Escudero et al., 1993); dentre outros.

intervalos para os parâmetros incertos, podendo assim, resultar em diferentes contrapartes robustas.

A seguir apresentaremos importantes abordagens de otimização robusta relacionadas a diferentes tipos de intervalos definidos para os parâmetros incertos.

2.3.1. Abordagem de Soyster

Na abordagem criada por Soyster (1973), os parâmetros de valor desconhecido são definidos como pertencentes a um intervalo fechado e simétrico, com centro no valor esperado para o parâmetro incerto. No decorrer deste trabalho, utilizaremos a nomenclatura “caixa de incertezas” sempre que nos referirmos a este tipo de intervalo.

O intervalo definido pela “caixa de incertezas” apresenta o seguinte formato $[\delta' - \epsilon, \delta' + \epsilon]$, sendo que δ' representa o valor esperado para o parâmetro incerto e ϵ a amplitude do intervalo simétrico. Quanto maior a amplitude da “caixa de incertezas”, maior é a gama de cenários futuros em relação aos quais o modelo se manterá robusto.

O modelo de Soyster (1973) considera que os parâmetros com incertezas se encontram na matriz de restrições A de um problema do tipo:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & c'x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Ou seja, cada linha i da matriz definida pelo produto da matriz A pelo vetor de variáveis x representa uma função que deve apresentar valor inferior a b_i . Dessa forma, pode-se tornar o modelo robusto através da maximização de cada uma dessas funções em relação ao pior cenário possível relativo às incertezas presentes nos parâmetros da matriz A .

Conforme apresentado anteriormente, é possível minimizar de maneira robusta uma função $f(x, \delta)$, com variável x e parâmetro incerto δ tal que $\delta \in [\delta' - \epsilon, \delta' + \epsilon]$, através da resolução do seguinte problema:

$$\min F(x, \delta)$$

$$F(x, \delta) = \max_{\delta} \{f(x, \delta) \mid \delta' - \epsilon \leq \delta \leq \delta' + \epsilon\} = \max_{\delta} \{f(x, \delta) \mid |\delta' - \delta| \leq \epsilon\}$$

Assim, considerando que cada linha da matriz A consiste em uma função do tipo f , Soyster (1973) definiu a contraparte robusta para seu problema de otimização, através da minimização de $F(x, \delta)$.

Este modelo criado por Soyster (1973) possibilita que a contraparte robusta de um modelo de programação linear, continue sendo linear, demandando assim, menor poder computacional para a resolução do problema. Porém, ao definir os intervalos dos parâmetros como uma “caixa de incertezas”, sem que haja nenhuma interação entre os mesmos, o pior cenário possível resultante da solução do problema minimax, considera que o pior resultado se concretize ao mesmo tempo para todos os ativos, o que seria muito improvável.

Dessa forma, a abordagem criada por Soyster pode ser aplicada em uma grande gama de problemas reais, ao possibilitar que a contraparte robusta se mantenha linear. Entretanto, pode resultar em soluções muito conservadoras, o que levaria a solução robusta a apresentar desempenho muito inferior ao da solução do problema de otimização nominal.

2.3.2. Abordagem de Ben-Tal e Nemirovski

Ben-Tal e Nemirovski (1999) demonstraram que a formulação da contraparte robusta de um problema de otimização depende dos intervalos definidos para os parâmetros incertos, e que a definição dos intervalos sobre a forma de elipses aumenta a interação entre os parâmetros, evitando que a contraparte robusta direcione o problema para um cenário no qual o pior resultado possível se concretize para cada um dos ativos. Faz-se importante ressaltar que as interações elipsoidais não apresentam nenhum tipo de informação probabilística, assim como na abordagem de “caixa de incertezas”.

Considerando α_i como a linha i da matriz de restrições A , pode-se representar o intervalo elipsoidal como (Bohle et al., 2009):

$$S_i = \{\alpha: (\alpha - \alpha_i')^T V_i^{-1} (\alpha - \alpha_i') \leq r^2\}$$

Sendo que:

α_i' = valor nominal ou esperado para os parâmetros incertos

V_i^{-1} = matriz definida e positiva, semelhante à matriz de covariância

O modelo definido por Ben-Tal e Nemirovski (1999) possibilita uma maior interação entre os parâmetros incertos, porém, ao utilizar intervalos elipsoidais, a contraparte robusta se torna um problema de otimização quadrático cônico, muito mais complexo de ser implementado do que o modelo proposto por Soyster (1973).

O desenvolvimento de contrapartes robustas menos conservadoras é de grande importância para qualquer tomador de decisão, pois existe um prêmio máximo que se está disposto a pagar para reduzir os riscos, representado neste caso, pela incerteza na previsão dos parâmetros. Por isso, as soluções dos modelos robustos não podem apresentar desempenho muito inferior ao do modelo relativo aos valores nominais dos parâmetros.

Neste trabalho, porém, não utilizaremos a abordagem proposta por Ben-Tal e Nemirovski (1999), pois sua aplicação nos problemas estudados demandaria uma enorme capacidade computacional.

2.3.3. Abordagem de Bertsimas e Sim

Bertsimas e Sim (2004) propõem uma nova abordagem para representação das incertezas dos parâmetros, que possibilita que a contraparte robusta continue sendo linear, porém, sem afetar de maneira excessiva o valor obtido para a função objetivo. Neste modelo, os parâmetros incertos podem oscilar dentro de intervalos fechados com centro no valor nominal esperado para os parâmetros e amplitude correspondente à diferença entre o valor nominal e o pior cenário possível. Porém, os piores valores possíveis assumidos para os parâmetros incertos são limitados por um parâmetro Γ , definido por Bertsimas e Sim como o “preço da robustez”.

A definição dos intervalos no modelo de Bertsimas e Sim (2004) é idêntica à da abordagem criada por Soyster (1973), sob o ponto de vista de que os parâmetros incertos podem oscilar dentro de um intervalo simétrico.

Entretanto, em seu modelo, Bertsimas e Sim (2004) inserem a seguinte restrição, que possibilita um maior controle sobre o conservadorismo do modelo.

$$\left(\sum_{i=1}^n (|a_{ij} - a'_{ij}|/s_{ij}) \right) < \Gamma, \quad \forall i$$

Nesta restrição $|a_{ij} - a'_{ij}|$ representa a diferença entre os valores que podem ser assumidos pelos parâmetros incertos e o valor nominal definido para os mesmos e s_{ij} indica a amplitude do intervalo simétrico. Assim, quanto menor o valor assumido para o parâmetro Γ , menor poderá ser a variação entre os parâmetros incertos e seus valores nominais.

O modelo de Bertsimas e Sim (2004), assim como o de Ben-Tal e Nemirovski (1999), possibilita a análise de uma maior interação entre os parâmetros, evitando que se leve em consideração a concretização do pior resultado possível para todos os ativos. Porém, sua grande vantagem reside no fato de que possibilita a definição de uma contraparte robusta no mesmo formato do problema original, ou seja, se as restrições do problema original são lineares, também o será sua contraparte robusta equivalente.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresentaremos uma revisão bibliográfica que dará sustentação para os estudos desenvolvidos ao longo deste trabalho.

3.1 *GESTÃO DE PORTFÓLIO*

Gestão de portfólio consiste na aplicação de recursos limitados, nos investimentos que melhor atendem às necessidades dos investidores, sob o ponto de vista de seu anseio por maior retorno em comparação com sua aversão a risco.

Quanto maior a aversão a risco do investidor, maior sua propensão a investir em ativos com rentabilidade pré-definida, ou pelo menos mais previsível e com menor variação, mesmo que este ativo forneça menor retorno.

Os gestores de portfólio podem optar por dois tipos básicos de investimento: renda fixa e renda variável. Os investimentos em renda fixa podem ser divididos em pré e pós-fixados, sendo que os pré-fixados apresentam remuneração determinada no momento da aplicação, enquanto que os pós-fixados somente no momento final da aplicação, pois seu rendimento se encontra atrelado a algum índice. Existem diversos investimentos de renda fixa, como por exemplo, caderneta de poupança, Certificado de Depósito Bancário (CDB), dentre vários outros títulos de dívida pública ou privada, porém, a discussão acerca dos mesmos não faz parte do escopo deste trabalho. Já os investimentos de renda variável possuem retorno totalmente incerto, como por exemplo, o investimento em ações.

Existem inúmeras possibilidades de investimento, cada qual apresentando certa expectativa de retorno para um determinado nível de risco. Porém, somente após os estudos de Markowitz (1952) a seleção de portfólio passou a ser tratada de maneira científica, no que diz respeito à combinação dos investimentos com melhor relação risco-retorno.

Antes do desenvolvimento da teoria de portfólio, os investidores analisavam simplesmente a relação risco-retorno de ativos individuais na composição de suas carteiras de investimento.

Markowitz, porém, conseguiu demonstrar que dependendo da correlação entre os ativos que compusessem o portfólio, seria possível reduzir o risco do mesmo a um nível até mesmo inferior ao de seu ativo mais seguro.

O modelo de Markowitz (1952) busca a otimização da relação risco-retorno, sendo os retornos dos ativos tratados como variáveis aleatórias de distribuição normal e o risco definido através da variância dos diferentes ativos. Porém, sua principal contribuição foi demonstrar que ativos com correlação inferior a 1 podem resultar em uma carteira de investimento com variância, ou seja, risco, inferior à soma das variâncias de cada um dos ativos individualmente. Essa teoria ficou conhecida como princípio da diversificação.

Ao compor um portfólio, estamos considerando a seguinte soma ponderada de variáveis aleatórias, sendo que A_i representa a variável aleatória i , enquanto w_i indica o peso da mesma na soma ponderada.

$$A = \sum_{i=1}^N w_i A_i$$

Em seu artigo, Markowitz (1952) destaca que a média e a variância da soma ponderada de variáveis aleatórias podem ser representadas da seguinte forma:

Média:
$$E(A) = \sum_{i=1}^N w_i E(A_i)$$

Variância:
$$\sigma^2(A) = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N w_i w_j \sigma_{ij}$$

Sendo que $E(A_i)$ denota a média da variável aleatória e σ_{ij} a covariância entre as variáveis A_i e A_j .

Dessa forma, Markowitz definiu o retorno esperado e o risco do portfólio, como sendo:

Retorno Esperado:
$$R = \sum_{i=1}^N w_i r_i$$

Variância:
$$\sigma^2(A) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j$$

- w_i : composição de cada ativo no portfólio
- r_i : retorno esperado para o ativo i
- σ_{ij} : covariância entre os ativos i e j

O retorno esperado e a variância são utilizados em um modelo de risco-retorno, cuja solução resulta na combinação ótima de ativos que possibilita a definição da carteira de menor risco para um determinado nível de retorno.

Para cada nível de retorno, teremos uma carteira de ativos diferente que possibilitará a minimização do risco. A curva que representa essa relação ótima de risco-retorno para as diferentes carteiras é denominada fronteira eficiente.

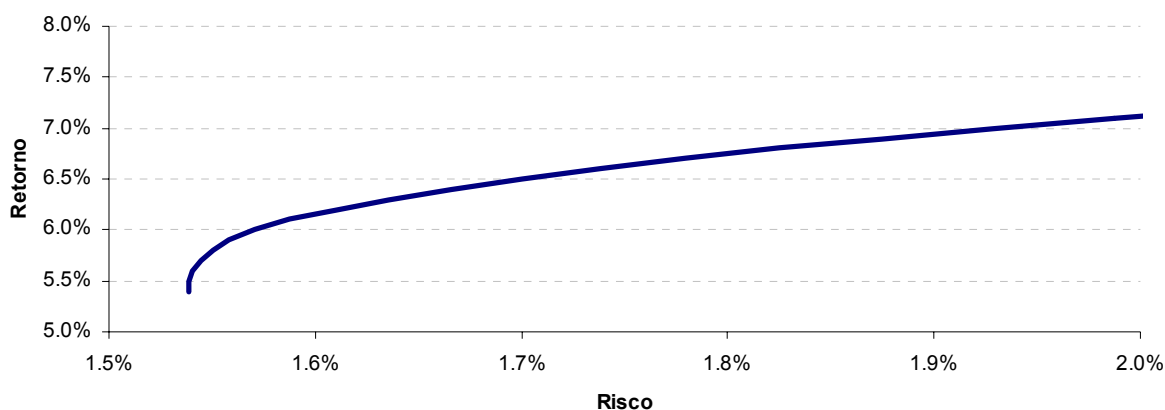


Gráfico 2. Fronteira eficiente

Dependendo da propensão do investidor ao risco, podem ser definidas carteiras com maior ou menor expectativa de retorno, porém, a fronteira eficiente representa os pontos com melhor combinação risco-retorno. Ou seja, caso o ponto geométrico representado pela relação risco-retorno de uma carteira de investimento não se encontre na fronteira eficiente, existirá outra carteira que poderá apresentar maior rentabilidade esperada para um mesmo nível de risco.

3.2 MEDIDAS DE RISCO

3.2.1. Variância

A variância indica a dispersão de uma variável aleatória em relação a seu valor médio. Dessa forma, podemos denotar a variância σ^2 de uma variável aleatória X , como sendo:

$$\sigma^2 = E[(X - E(X))^2]$$

Sendo que:

$E(X)$ = Média de X

$E[(X - E(X))^2]$ = Média do quadrado da diferença das variáveis X pela sua média

Desenvolvendo a expressão apresentada acima chegamos às seguintes fórmulas para o cálculo de variância (NETO, CYMBALISTA, 2006):

$\sigma^2 = \sum (x - E(X))^2 \cdot p(x)$, caso X seja uma variável aleatória discreta

$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx$, caso X seja uma variável aleatória contínua

Sendo que:

$p(x)$ = probabilidade de x

$f(x)$ = função densidade de probabilidade de x

Apesar de ser amplamente utilizada na literatura como uma das principais medidas de risco, a variância não apresenta algumas propriedades importantes, o que dificulta sua utilização como medida de risco de carteiras de investimento.

Esta medida de risco quantifica a dispersão do retorno dos diferentes ativos, porém, não analisa as caudas da distribuição de probabilidade (RIBEIRO; FERREIRA, 2004), ou seja, os pontos de perda máxima relativos aos ativos. Dessa forma, a variância não efetua uma análise

adequada do risco de um portfólio em situações de mudanças mais extremas, como ocorreu com a crise dos *subprime* iniciada em 2007, se transformando posteriormente em uma crise de confiança global, principalmente no segundo semestre de 2008, após a quebra do Banco *Lehman Brothers*.

Além disso, desvios positivos e negativos em relação à média impactam de maneira diferente a percepção dos investidores, fator este que também não é levado em consideração no cálculo da variância.

A partir dessas constatações, passou-se a dar maior destaque aos percentis como medidas de risco, como por exemplo, o *Value at Risk* (VaR) e o *Conditional Value at Risk* (CVaR).

3.2.2. VaR

O VaR (Value at Risk) é uma importante medida de risco que quantifica a perda potencial máxima que um ativo financeiro pode sofrer dentro de um certo período de tempo para determinado nível de confiança.

Considerando K como uma variável aleatória e F sua função de distribuição, de tal forma que $F(h) = P\{K \leq h\}$ e $F^{-1}(w) = \min \{h: F(h) \geq w\}$, o VaR pode ser definido como (QUARANTA, ZAFFARONI, 2008):

$$\text{VaR}_\alpha(K) = F^{-1}(\alpha)$$

Existem diferentes formas de se calcular o VaR, porém, as mais utilizadas são o método da série histórica e o método paramétrico.

No método da série histórica, são ordenados um conjunto de N retornos da carteira de investimento e o VaR será $(\alpha \cdot N)$ ésimo pior valor da série, onde α indica o nível de confiança. Ou seja, o VaR com nível de confiança de 5% de uma série histórica com 100 retornos, seria o quinto pior valor desta série.

Já no método paramétrico, considera-se que a variável retorno apresenta distribuição normal, logo o VaR pode ser calculado como:

$$\text{VaR} = E(R) + Z_{\alpha}\sigma_R$$

Sendo que:

$E(R)$: média da variável retorno

σ_R : desvio-padrão da variável retorno

α : Nível de confiança

Z_{α} : valor para o qual a função densidade de probabilidade normal acumulada $F(Z_{\alpha})$ é igual a $1 - \alpha$

Por ser uma metodologia de fácil cálculo e que impõe uma estrutura mais crítica de análise dos riscos, através da definição de percentis máximos de perda, o VaR passou a ser amplamente utilizado por instituições financeiras para definição de riscos de ativos e portfólios.

Porém, o VaR não analisa as perdas que podem acontecer após o valor máximo definido dentro de um certo intervalo de significância. Ou seja, ativos cuja perda máxima for a mesma dentro do intervalo de confiança definido, serão considerados de igual risco, mesmo que a cauda de um deles apresente dispersão muito superior ao do outro, indicando que em períodos de maior estresse esse ativo tende a resultar em maiores perdas.

Além disso, o VaR não pode ser considerado uma medida de risco coerente (ARTZNER et al., 1998). Segundo Artzner (1998), uma medida de risco ρ pode ser considerada coerente quando ela obedece aos seguintes axiomas, sendo que $G \in \mathbb{R}^n$ e $r' = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, onde r representa a taxa de retorno total de instrumentos financeiros com risco considerado nulo:

1. $\rho(X + \alpha \cdot r') = \rho(X) - \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall X \in G$
2. $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$, $\forall X_1, X_2 \in G$
3. $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$, $\forall \lambda \geq 0$, $\forall X \in G$
4. $\rho(Y) \leq \rho(X)$, $\forall Y, X \in G$, $Y \leq X$

O VaR não apresenta a propriedade (2) da subaditividade, o que impede a convexidade (QUARANTA; ZAFFARONI, 2008) e dificulta sua otimização do ponto de vista matemático.

3.2.3. CVaR

Nos últimos anos, a literatura tem dado grande destaque à utilização do CVaR (*Conditional Value at Risk*) como medida de risco para modelos de seleção de portfólio (ver QUARANTA; ZAFFARONI, 2008 e KROKHMAL; URYASEV, 2001). O CVaR indica o valor médio da cauda, ou seja, a média das perdas do portfólio superiores ao VaR, sanando assim, alguns dos problemas do VaR.

Enquanto o VaR analisa a perda máxima de uma carteira de ativos para um nível de confiança α , o CVaR define o valor médio das perdas do portfólio, considerando que já ocorreu o pior evento possível definido pelo VaR.

Ou seja, considerando $f(x,y)$ como a função de perdas do portfólio, onde x representa as variáveis relativas à composição do portfólio e y as variáveis relativas aos cenários futuros, as perdas superiores ao VaR poderiam ser representada por $\varphi(x, \text{VaR}) = \max(0, f(x,y) - \text{VaR})$.

Logo, podemos representar o CVaR como:

$$\text{CVaR} = E(\varphi(x, \text{VaR}))$$

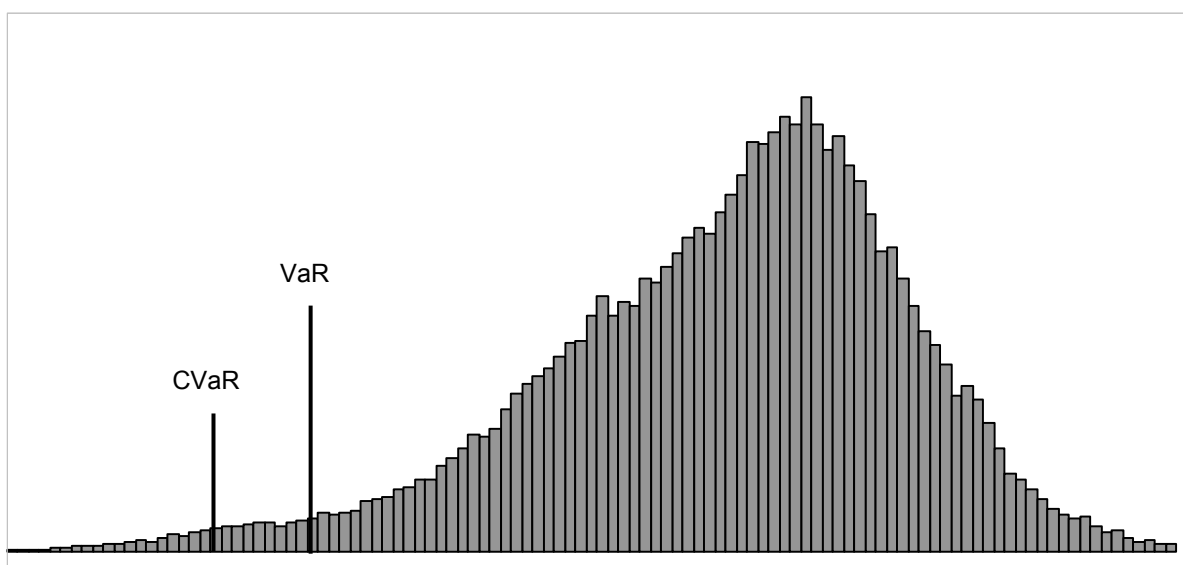


Gráfico 3. Comparação CVaR e VaR

Pela própria definição do CVaR, percebe-se que esta medida de risco leva em conta a cauda de distribuição de perdas na definição do risco de um ativo ou de uma carteira de investimentos. Além disso, também pode ser considerada uma medida de risco coerente (GAIVORONSKI; PFLUG, 2001).

Apesar de o conceito de CVaR depender da definição prévia do VaR, é possível obter os valores das duas medidas de risco simultaneamente através da utilização da seguinte função (ROCKAFELLAR; URYASEV, 2002):

$$F_{\alpha}(x,a) = a + \frac{1}{(1-\alpha)} E \{ [f(x,y) - a]^+ \}$$

Sendo que

$$[f(x,y) - a]^+ = [t]^+ = \max \{0, t\}$$

f indica a função de distribuição de perdas, sendo $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ o vetor de decisão, representando o portfólio, e $y \in Y \subset \mathbb{R}^n$ os cenários adotados para um conjunto de parâmetros, em nosso estudo, o retorno dos ativos nos períodos t .

Ao resolver o problema da minimização de $F_{\alpha}(x,a)$, o valor mínimo de F e a variável a indicarão respectivamente, os valores de CVaR e VaR.

Atualmente, a utilização do CVaR como medida de risco tem se tornado cada vez mais freqüente, não somente na literatura, mas também na gestão de portfólios, por ser esta uma medida de risco coerente e mais robusta do que a variância e o VaR, devido ao fato de levar em conta as caudas da distribuição de probabilidade. Por estas razões, neste estudo, trabalharemos com o CVaR juntamente com a otimização robusta.

4 MODELOS

Neste capítulo, serão apresentados dois modelos de seleção de portfólio, o de Markowitz (1952) e o de DiClemente (2002), os quais utilizam respectivamente a variância e o CVaR (Conditional Value at Risk) como medidas de risco. Posteriormente, serão indicadas contrapartes robustas para o modelo de DiClemente (2002), no intuito de reduzir a sensibilidade do mesmo à expectativa de retorno futuro para os diferentes ativos.

4.1 *MODELOS CLÁSSICOS DE SELEÇÃO DE PORTFÓLIO*

4.1.1. Modelo de Markowitz

O modelo de Markowitz (1952) representa matematicamente o problema da composição de uma carteira de investimentos que possibilite a minimização do risco para um determinado nível de retorno, sendo o risco representado pela variância.

No intuito de se encontrar o portfólio com variância mínima, são definidos valores esperados para o retorno dos ativos, os quais devem resultar em uma carteira com retorno maior ou igual ao valor mínimo definido pelo tomador de decisão. Além disso, a variância de cada ativo, bem como a correlação entre os mesmos são definidos com base em dados históricos.

Conforme apresentamos anteriormente, a variância do portfólio pode ser calculada através da seguinte função:

$$\sigma^2(A) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j$$

Função esta, que pode ser representada vetorialmente por:

$$\sigma^2 = w' \Sigma w$$

Sendo que:

w : vetor composição dos ativos no portfólio

Σ : matriz de covariância

A matriz de covariância consiste em uma matriz simétrica, na qual cada valor a_{ij} representa a covariância do ativo i com o ativo j .

Desta forma, o problema de determinação da composição ótima de uma carteira de investimentos de n ativos $W = (w_1, w_2, \dots, w_N)$, com retorno esperado $R = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) = w' \Sigma w \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^N r_i w_i \geq G \end{array} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (2)$$

$$w_i \geq 0 ; i = 1, \dots, N \quad (3)$$

O modelo apresentado acima busca minimizar o risco do portfólio, devendo o mesmo obedecer a três restrições.

A restrição (1) é a restrição básica do modelo de Markowitz, segundo a qual o portfólio de ações deve gerar um retorno médio esperado superior ao valor mínimo estipulado pelo investidor.

Através da restrição (2), garantimos que todo o capital a ser investido seja alocado entre os diversos ativos que podem compor o portfólio. Ou seja, a soma das composições de todas as ações deve resultar em uma carteira de investimento com 100% do capital investido.

Com a restrição (3), garantimos que nenhum ativo apresente composição inferior a zero, impedindo assim, que a venda a descoberto seja considerada na composição do portfólio. A venda a descoberto consiste na venda de uma ação que não possuímos no momento, sendo que para fazer isso, alugamos a ação de alguém que a detenha, pagando uma taxa de empréstimo, e vendemos para outro investidor. Após certo tempo, compramos a ação e devolvemos para quem nos havia emprestado. Essa operação financeira pode resultar em um ganho caso o valor da venda seja maior que o valor da compra mais as taxas de empréstimo.

4.1.2. Modelo CVaR

Nos últimos anos diversas críticas foram feitas à utilização da variância como medida de risco. Neste contexto, o CVaR passou a ter grande destaque na literatura, por ser uma medida de risco coerente e que analisa de maneira mais significativa situações de perdas extremas, ao representar o ponto médio da cauda.

Este modelo que estamos denominando de CVaR, consiste em um modelo de risco-retorno semelhante ao de Markowitz (1952) apresentado no tópico anterior, porém, substituindo a variância pelo CVaR como medida de risco a ser minimizada.

Assim, a função $f(x) = w' \sum w$ será substituída por uma que indique o CVaR, ou seja, a média das perdas do portfólio superiores ao VaR.

Conforme apresentado anteriormente, Rockafellar e Uryasev (2002), definiram a seguinte função para representar o CVaR:

$$F_{\alpha}(x,a) = a + \frac{1}{(1-\alpha)} E \{ [f(x,y) - a]^+ \}$$

$$[f(x,y) - a]^+ = [t]^+ = \max \{0, t\}$$

No entanto, para facilitar a definição do modelo, podemos substituir o termo $[f(x,y) - a]^+$, por variáveis auxiliares LP_t , para a qual definiremos restrições de tal forma que a mesma também seja igual a $\max \{0, t\}$. Assim, a resolução do modelo se torna um problema de programação linear, que pode ser facilmente resolvido através da utilização de softwares especializados.

No modelo a seguir (DICLEMENTE, 2002), o CVaR é utilizado como medida de risco.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & a + \frac{1}{(1-\alpha)} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{(T-1)} LP_t \\ \text{s.t.} \quad & LP_t \geq \sum_{i=1}^N (P_{t-1,i} - P_{t,i}) w_i - a \quad \forall t \in \{1, \dots, T\} \quad (1) \end{aligned}$$

$$LP_t \geq 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N r_i w_i \geq G \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (4)$$

$$w_i \geq 0 ; i = 1, \dots, N \quad (5)$$

- $i = 1, \dots, N$ representa os ativos
- $t = 1, \dots, T$ representa os cenários (dias)
- α representa o nível de significância
- G representa o valor mínimo de retorno esperado após a seleção do portfólio.
- $P_{t,i}$ representa o preço do ativo i no cenário t
- r_i representa o retorno esperado
- w_i representa a quantidade do ativo i no portfólio
- a representa a variável que aproxima o valor de VaR para o nível de significância α
- LP_T variáveis que indicam as perdas no portfólio

Neste modelo busca-se a minimização do CVaR, utilizando como dados as séries históricas dos preços dos ativos, como forma de definir a distribuição das perdas e ganhos do portfólio.

As restrições (3), (4) e (5) são iguais às definidas no modelo de Markowitz (1952), já tendo sido explicadas no tópico anterior.

Já as restrições (1) e (2) estão relacionadas à substituição de $[f(x,y) - a]^+$ pela variável auxiliar LP_t na função objetivo.

Através da restrição (1), garantimos que a variável LP_t seja sempre maior que as perdas ou ganhos do portfólio subtraídos da variável a , que como dito anteriormente Rockafellar e Uryasev demonstraram ser igual ao valor do VaR após a otimização. Por sua vez, a restrição (2) garante que a variável LP_t assumam sempre valores positivos.

Desta forma, a variável LP_t apresenta sempre o valor máximo entre 0 e a diferença das perdas do portfólio pelo valor do VaR, o que nos garante que a função objetivo utilizada no modelo de DiClemente (2002) seja equivalente à função F_α definida por Rockafellar e Uryasev (2002).

4.2 *MODELOS ROBUSTOS*

Nos dois modelos apresentados no tópico anterior, os retornos futuros dos ativos são tratados como parâmetros conhecidos, o que gera um risco considerável de que na concretização de valores diferentes dos inicialmente projetados, a solução ótima viole diversas restrições do problema de otimização, apresentando assim, desempenho ruim.

Dessa forma, técnicas de otimização robusta poderiam ser aplicadas a ambos os modelos. No entanto, optamos por trabalhar com o modelo que utiliza o CVaR, por ser uma medida de risco coerente (ARTZNER et al., 1998) e por possibilitar uma análise das caudas das distribuições do retorno dos ativos. Para este modelo, apresentaremos uma contraparte robusta definida a partir da abordagem de Soyster (1973) e desenvolveremos outra à partir da abordagem de Bertsimas e Sim (2004).

4.2.1. Modelo de Soyster aplicado à seleção de portfólio

Soyster foi um dos primeiros a estudar incertezas nos parâmetros das restrições de problemas de otimização linear. Para um modelo no seguinte formato:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & c'x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

sendo $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ com $a_j \in \mathbb{R}^n$.

Soyster (1973) assume que somente a matriz de restrições A possua parâmetros com incertezas, sendo que a única informação certa em relação ao valor real a_{ij} do parâmetro relativo à linha i , coluna j , é que o mesmo pertence ao intervalo fechado $[a'_{ij} - s_i, a'_{ij} + s_i]$, sendo a'_{ij} o valor esperado para o parâmetro e s_i a amplitude do intervalo, que mede a inexatidão do mesmo.

Assim, podemos definir o seguinte lugar geométrico para os possíveis valores que podem ser assumidos pelos parâmetros incertos do vetor coluna a_j $C_j = \{a \in R^n \mid \|a - a'_j\| \leq s_j\}$. Com isto, Quaranta e Zaffaroni (2008), citando Soyster (1973) apresentam que o problema original de otimização pode ser substituído por:

$$\begin{aligned} & \text{Sup } c'x \\ & \text{s.t. } x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_N C_N \subseteq C(b) \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Sendo $C(b) = \{y \in R^n \mid y \leq b\}$

Soyster (1973) demonstrou que este problema pode ser resolvido através do seguinte modelo de programação linear:

$$\begin{aligned} & \max c'x \\ & \text{s.t. } \sum_j a'_{ij} x_j + \sum_j s_{ij} y_{ij} \leq b_i \quad \forall i \\ & \quad -y_j \leq x_j \leq y_j \quad \forall j \\ & \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

Sendo:

- $x \in R^n$: vetor das variáveis do problema de otimização
- $y \in R^n$: vetor de variáveis auxiliares utilizadas na resolução do problema
- a'_{ij} : estimativa para os parâmetros pertencente à linha i , coluna j da matriz A
- s_{ij} : amplitude do intervalo simétrico definido de acordo com a inexatidão relativa ao parâmetro a_{ij} .

No modelo de seleção de portfólio os parâmetros relativos ao retorno futuro dos diversos ativos apresentam grandes incertezas, sendo praticamente impossível estimá-los de maneira adequada. Ou seja, no modelo de risco retorno apresentado por DiClemente (2002), os parâmetros com incerteza se encontram na restrição que define que o retorno do portfólio deve ser superior a um valor mínimo definido pelo investidor:

$$\sum_{i=1}^N r_i w_i \geq G$$

Logo, para tornar o modelo robusto, devemos aplicar a estratégia de maximizar o pior cenário possível para esta função retorno.

$$(\text{Min}_{r_i \in I} \sum_{i=1}^N r_i w_i) \geq G$$

Sendo I o intervalo definido para o retorno futuro dos ativos.

Baseando-se na abordagem de Soyster (1973), Quaranta e Zaffaroni (2008) transformaram esse problema de maxmin do retorno do portfólio nas seguintes restrições:

$$\sum_{i=1}^N r'_i w_i - \sum_{i=1}^N s_i y_i \geq G$$

$$-y_i \leq w_i \leq y_i$$

$$y \geq 0$$

Os parâmetros r'_i e s_i representam respectivamente o valor esperado para o retorno do ativo i e amplitude do intervalo, enquanto que as variáveis w_i , y_i indicam a composição do ativo no portfólio e a variável auxiliar utilizada no modelo de Soyster (1973).

O problema de seleção de carteira de investimentos apresenta como função objetivo a minimização da medida de risco e a restrição retorno deve ser maior que um valor mínimo, ao contrário do problema original estudado por Soyster, cuja restrição da matriz A devia ser inferior a um valor b. Por isso, na maximização do pior cenário possível para o modelo de seleção de portfólio, o produto da amplitude do intervalo (s_i) pela variável auxiliar (y_i) é subtraído do retorno esperado para o portfólio.

Dessa forma, Quaranta e Zaffaroni (2008) desenvolveram a seguinte contraparte robusta para o modelo de seleção de portfólio definido por DiClemente (2002), no qual o CVaR é utilizado como medida de risco.

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & a + \frac{1}{(1-\alpha)} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{(T-1)} LP_t \\
 & \sum_{i=1}^N r'_i w_i - \sum_{i=1}^N s_i y_i \geq G \\
 & -y_i \leq w_i \leq y_i \\
 & y \geq 0 \\
 & LP_t \geq \sum_{i=1}^N (P_{t-1,i} - P_{t,i}) w_i - a \quad \forall t \in \{1, \dots, T\} \\
 & LP_t \geq 0 \\
 & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\
 & w_i \geq 0 ; i = 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

4.2.2. Modelo de Bertsimas e Sim aplicado à seleção de portfólio

O modelo de Soyster (1973) possui como inconveniente o fato de considerar que o pior cenário possível se concretize simultaneamente para todos os ativos, o que pode tornar o modelo muito conservador.

Por isso, Bertsimas e Sim (2004) propõem a definição de um intervalo para os parâmetros incertos semelhante à “caixa de incertezas”, porém, que controla o conservadorismo do modelo através de um parâmetro Γ , definido pelos autores como o “preço da robustez”.

Bohle et al. (2009) citando Bertsimas e Sim (2004) apresenta o seguinte intervalo para os parâmetros incertos:

$$S = \{ A \in R^{m \times n}: a_{ij} \in [a'_{ij} - s_{ij}, a'_{ij} + s_{ij}], \forall i, j; (\sum_{j=1}^n (|a_{ij} - a'_{ij}|/s_{ij})) < \Gamma, \forall i \}$$

Sendo que a'_{ij} e s_{ij} , representam respectivamente o valor nominal e a amplitude de oscilação do parâmetro incerto relativo à linha i e à coluna j de uma matriz de incertezas. E o parâmetro Γ indica o “preço da robustez”.

O termo $|a_{ij} - a'_{ij}|/s_{ij}$ consiste em um indicador com valor entre 0 e 1 de acordo com o tamanho da variação aceita para o parâmetro a_{ij} . Dessa forma, quanto menor o valor atribuído para Γ , menor a variação simultânea aceita para os parâmetros incertos. Porém, quanto mais o valor de Γ se aproxima do número de parâmetros com incerteza na restrição, maior é a variação atingida pelos parâmetros, e o modelo de Bertsimas e Sim (2004) se aproxima do modelo de Soyster (1973).

Dessa forma, um problema de otimização linear do tipo:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Considerando que somente a matriz A apresenta parâmetros de valor desconhecido, pode-se definir a seguinte contraparte robusta (BERTSIMAS; SIM, 2004):

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & (A'_i)^T x + \beta_i(x, \Gamma_i) \leq b_i \quad \forall i \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Sendo que A'_i denota os valores nominais da linha i .

Bertsimas e Sim (2004) demonstraram que a função β utilizada como proteção em cada uma das restrições relativas à matriz A com m linhas e n colunas, pode ser escrita como um problema de otimização.

$$\begin{aligned}
\beta_i(x, \Gamma_i) &= \max \sum_{j=1}^n x_j u_{ij} z_{ij} \\
\text{s.t. } \sum_{j=1}^n u_{ij} &\leq \Gamma_i \\
0 &\leq u_{ij} \leq 1
\end{aligned}$$

E que resolvendo o dual do problema que representa a função β e inserindo na contraparte robusta apresentada anteriormente, chegamos ao seguinte problema robusto definido pelo modelo de Bertsimas e Sim. As variáveis de apoio p_{ij} e z_i estão relacionadas à definição do problema dual.

$$\begin{aligned}
&\max c'x \\
\text{s.t. } \sum_{j=1}^n a'_{ij} x_j + z_i \Gamma_i + \sum_{j=1}^n p_{ij} &\leq b_i \quad \forall i \\
z_i + p_{ij} &\geq s_{ij} y_j \quad \forall i, j \\
-y_j &\leq x_j \leq y_j \quad \forall i \\
p_{ij} &\geq 0 \\
y_j &\geq 0 \\
z_i &\geq 0
\end{aligned}$$

Dessa forma, a aplicação do modelo de Bertsimas e Sim (2004) ao problema de seleção de portfólio possibilita o desenvolvimento de uma contraparte robusta linear, porém, sendo possível controlar o grau de conservadorismo através da definição do parâmetro Γ .

Como dito anteriormente, no modelo de seleção de portfólio de DiClemente (2002) as incertezas se encontram no retorno futuro para os ativos, devendo a função de proteção β ser inserida na restrição que estipula o retorno mínimo para o portfólio. Porém, ao contrário do modelo original adotado por Bertsimas e Sim, a função de proteção deve ser subtraída do valor nominal adotado para os parâmetros incertos, pois em nosso modelo estamos buscando minimizar o maior retorno possível.

$$\sum_{i=1}^N r_i w_i - \beta(x, \Gamma) \geq G$$

Assim, substituindo a função β pela resolução do dual chegamos à seguinte contraparte robusta para o problema de seleção de portfólio:

$$\text{Min} \quad a + \frac{1}{(1-\alpha)} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{(T-1)} LP_t$$

$$\sum_{i=1}^N r'_i w_i + z\Gamma + \sum_{i=1}^N p_i \geq G$$

$$z + p_i \geq s_i y_i$$

$$-y_i \leq w_i \leq y_i$$

$$y \geq 0$$

$$LP_t \geq \sum_{i=1}^N (P_{t-1,i} - P_{t,i}) w_i - a \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$$

$$LP_t \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 ; i = 1, \dots, N$$

5 SENSIBILIDADE DOS MODELOS DE SELEÇÃO DE PORTFÓLIO AOS PARÂMETROS INCERTOS

Markowitz e Rockafellar revolucionaram o estudo de finanças, possibilitando a otimização da relação risco-retorno na seleção de um portfólio de ativos. Seus estudos, porém, não levam em consideração o risco relativo à estimativa de variáveis aleatórias, como, por exemplo, o retorno esperado para os ativos.

Este capítulo tem como objetivo estudar a composição de um portfólio de ações através da utilização dos dois modelos de risco-retorno apresentados no capítulo anterior: o de Markowitz (1952) e o de DiClemente (2002), analisando as alterações em seus resultados com base na variação das estimativas do retorno esperado para cada ação.

5.1 ATIVOS QUE IRÃO COMPOR O PORTFÓLIO

A análise da sensibilidade dos modelos em relação às variações da estimativa do retorno esperado será feita através da composição de um portfólio de ações.

As ações são valores mobiliários emitidos por sociedades anônimas, representando a fração mínima do capital das empresas. Constituem-se, ainda, em títulos de renda variável por terem valorização e benefícios que não são conhecidos no início do investimento.

As empresas listadas na Bovespa são segmentadas em setores e sub-setores, divisão esta que será apresentada a seguir, visto que utilizaremos essa nomenclatura como forma de padronizar este estudo com o padrão utilizado no mercado.

Tabela 1. Segmentação empresas listadas Bovespa

Setor	Subsetor
Bens Industriais	Comércio
	Equipamentos Elétricos
	Máquinas e Equipamentos
	Material de Transporte
	Serviços
Construção e Transporte	Construção e Engenharia
	Transporte
Consumo cíclico	Automóveis e Motocicletas
	Comércio
	Diversos
	Hotéis e Restaurantes
	Lazer
	Mídia
	Tecidos, Vestuário e Calçados
	Utilidades Domésticas
Consumo não cíclico	Agropecuária
	Alimentos Processados
	Bebidas
	Comércio e Distribuição
	Diversos
	Fumo
	Produtos de Uso Pessoal e de Limpeza
	Saúde
Financeiro e Outros	Exploração de Imóveis
	Holdings Diversificadas
	Intermediários Financeiros
	Outros
	Previdência e Seguros
	Securitizadoras de Recebíveis
	Serviços Financeiros Diversos
Materiais Básicos	Embalagens
	Madeira e Papel
	Materiais Diversos
	Mineração
	Químicos
	Siderurgia e Metalurgia
Petróleo, Gás e Biocombustíveis	Petróleo, Gás e Biocombustíveis
Tecnologia da Informação	Computadores e Equipamentos
	Programas e Serviços
Telecomunicações	Telefonia Móvel
	Telefonia Fixa
Utilidade pública	Água e Saneamento
	Energia Elétrica
	Gás

Fonte: Site BM&FBOVESPA

A seleção das ações que irão compor o portfólio teve como diretrizes os seguintes critérios:

- 1) Cada ação deveria ser negociada desde 2003, para possibilitar a composição do histórico.
- 2) Cada ação deveria pertencer a um setor distinto da economia, para evitar que exista uma forte correlação positiva entre as mesmas. Empresas que atuam em ramos diferentes têm

menor probabilidade de apresentarem desempenho ruim em um mesmo período, aumentando a diversificação do portfólio.

- 3) As ações escolhidas deveriam pertencer ao Índice Bovespa, como forma de garantir que as mesmas possuam considerável volume de negociação.

Respeitando esses critérios foram escolhidas as seguintes ações para composição do portfólio:

Tabela 2. Ativos Portfólio

Ação	Setor Econômico	Código
Petrobrás PN	Petróleo, Gás e Biocombustíveis	PETR4
Vale R Doce PNA	Materiais Básicos	VALE5
Bradesco PNA	Financeiro e Outros	BBDC4
Brasil Telecom PN	Telecomunicações	BRTO4
Lojas Americanas PN	Consumo não cíclico	LAME4

A Petrobrás e a Companhia Vale do Rio Doce apresentam cada qual duas ações diferentes que participam de composição do Índice Bovespa (Ibovespa), respectivamente, PETR3 e PETR4; VALE3 e VALE5.

Como todas essas ações respeitam as diretrizes definidas anteriormente, optamos por escolher as de maior liquidez no mercado, o que pode ser representado pela participação das ações na composição do Ibovespa.

Os papéis que integrarão o índice são definidos quadrimestralmente, com base no índice de negociabilidade apurado para cada ação e em outros critérios adicionais (participação em termos de volume superior a 0,1% do total negociado na Bolsa e negociação em mais de 80% dos pregões do período). As variações na participação desses papéis, por sua vez, são apuradas na abertura de cada dia de negociação.

No dia 25 de setembro de 2008, as ações da Petrobrás e da Companhia Vale do Rio Doce apresentavam as seguintes participações percentuais no Ibovespa.

Tabela 3. Participação Vale e Petrobrás no Ibovespa

Ação	Código Ação	Part. (%)
Companhia Vale do Rio Doce	VALE3	3.3
	VALE5	12.7
Petrobrás	PETR3	3.1
	PETR4	12

Dessa forma, optamos por estudar as ações VALE5 e PETR4, devido a sua maior liquidez.

As análises serão realizadas com base nos preços de fechamento diários das ações indicadas anteriormente, tomando por base o período de 2 de janeiro de 2003 a 28 de dezembro de 2007. Apresentamos a seguir a evolução histórica dos preços dessas ações.

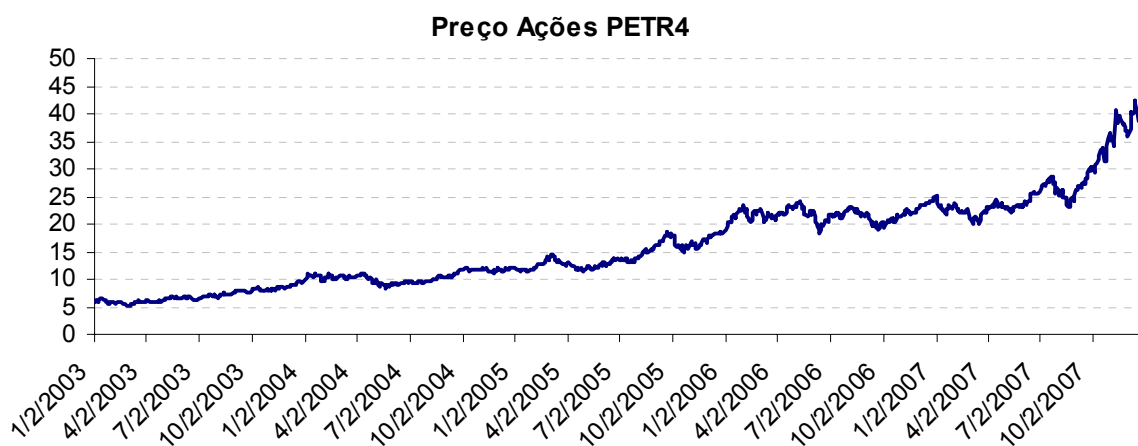


Gráfico 4. Preço Ações PETR4

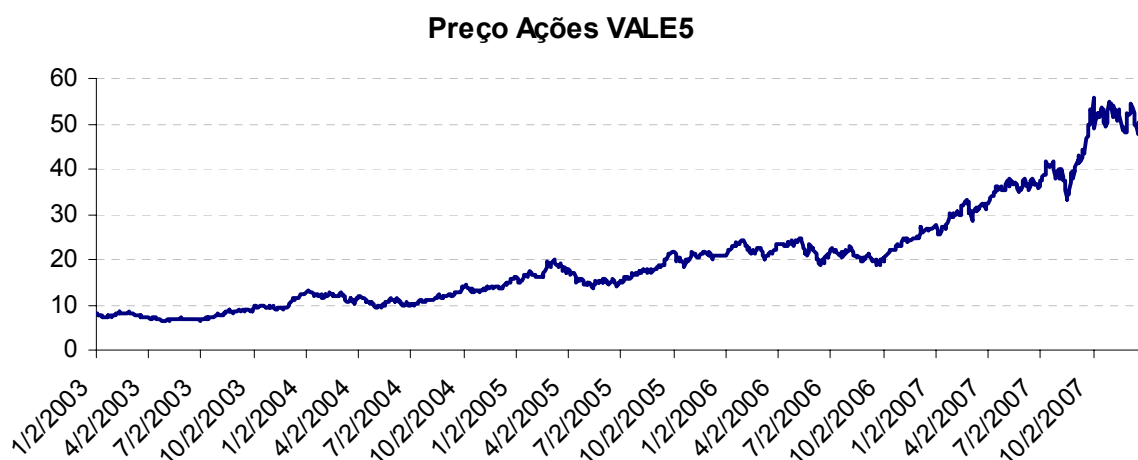


Gráfico 5. Preço Ações VALE5

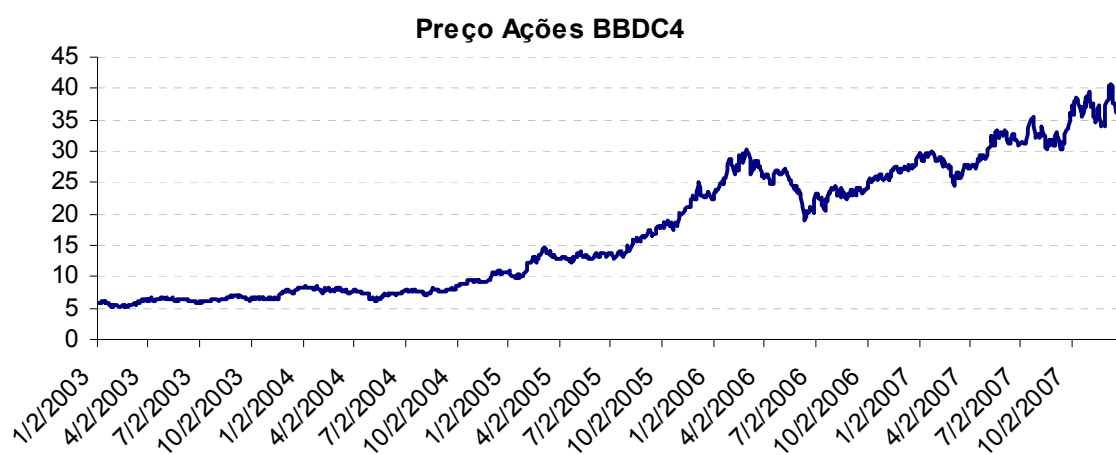


Gráfico 6. Preço Ações BBDC4

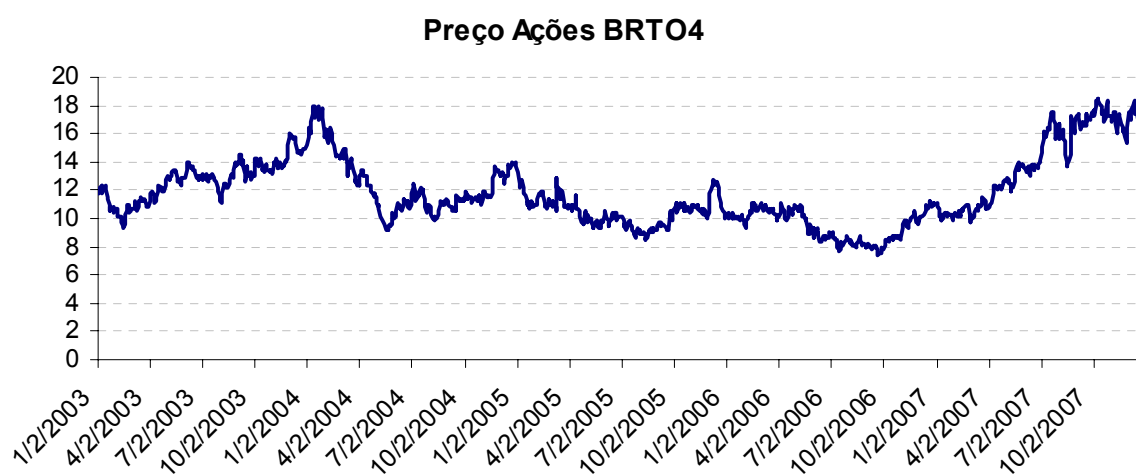


Gráfico 7. Preço Ações BRT04

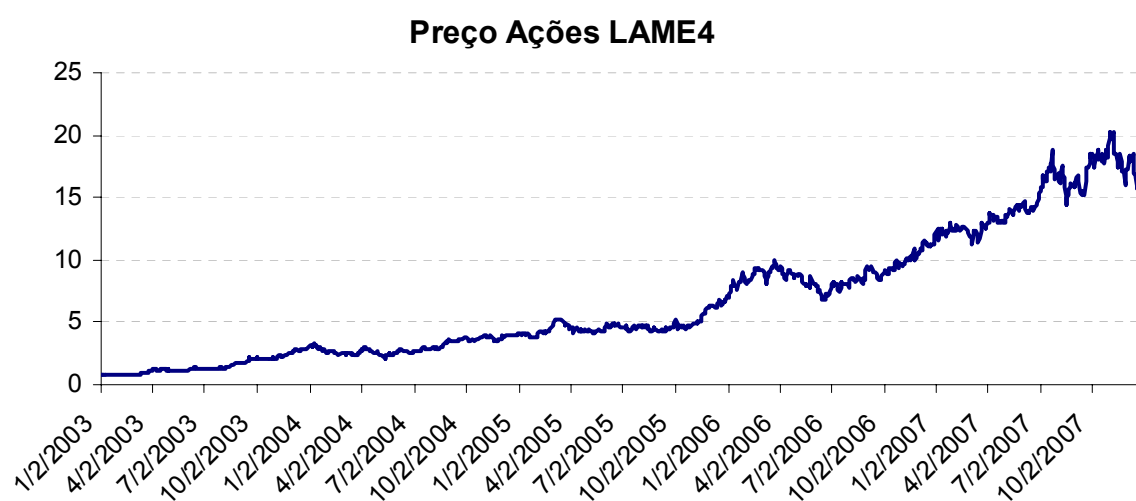


Gráfico 8. Preço Ações LAME4

5.2 CENÁRIOS

A definição da alocação de capital mediante a utilização dos modelos indicados anteriormente depende do retorno esperado para cada ativo. No entanto, considerando que o preço das ações segue um passeio aleatório, essa decisão possui diversas incertezas.

Dessa forma, faz-se necessária a projeção dos valores dos ativos dentro de certo intervalo de tempo. Neste trabalho, optamos por utilizar a simulação de Monte Carlo, por se tratar de uma das técnicas mais utilizadas na geração de cenários para os preços futuros dos ativos.

Na simulação de Monte Carlo são traçados, dentro de um intervalo de tempo definido, diferentes caminhos para o preço dos ativos. Ou seja, presume-se que o histórico dos retornos espelha de maneira adequada o que ocorrerá no futuro (RIBEIRO; FERREIRA, 2004).

As trajetórias para os preços das ações são traçadas com base na seguinte função:

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \delta \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{dt}$$

Nesta equação μ representa a taxa de retorno esperada; δ a volatilidade da ação; ε uma variável aleatória normal com média zero e desvio padrão um; e S é o preço da ação, cujo movimento pode ser considerado como um processo de Wiener (HULL, 2005).

Este processo apresenta a propriedade de Markov, a qual será muito importante na simulação, visto que consideraremos que o preço futuro da ação depende do valor presente e não do caminho percorrido até chegar ao mesmo.

Winston (2004) define a propriedade de Markov como:

$$P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t)$$

Na simulação de um portfólio de ações, porém, devemos levar em consideração que a trajetória dos preços das ações apresenta correlação, como indicado por Markowitz (1952) através do princípio da diversificação.

Por isso, para tornar a simulação compatível com o princípio da diversificação, foram aplicados choques multivariados às variáveis referentes aos preços das ações, utilizando não somente a função representativa de seu movimento aleatório, mas também a matriz de correlação para relacioná-las.

Os choques multivariados foram aplicados 30 dias úteis subsequentes tendo sido feitas 1000 simulações, definindo assim, seqüências de caminhos para os preços das ações. As simulações foram iniciadas com base nos dados do dia 02 de janeiro de 2008. Nesta data, as ações iniciaram sua negociação com os seguintes preços:

Tabela 4. Preço Ações (02/01/2008)

Ação	Preço inicial
PETR4	43.5
VALE5	49.3
BBDC4	35.3
BRT04	17.8
LAME4	15.1

Além disso, foi adotada a hipótese de que a matriz de covariância é constante ao longo do intervalo de simulação. A seguir apresentamos os gráficos com as trajetórias simuladas para os preços das diferentes ações. As simulações foram implementadas no software MATLAB.

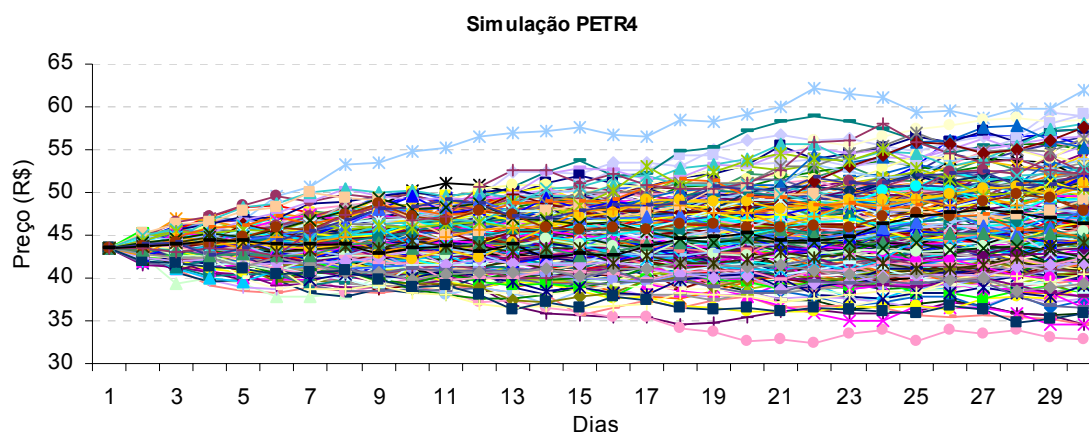


Gráfico 9. Simulação Preços PETR4

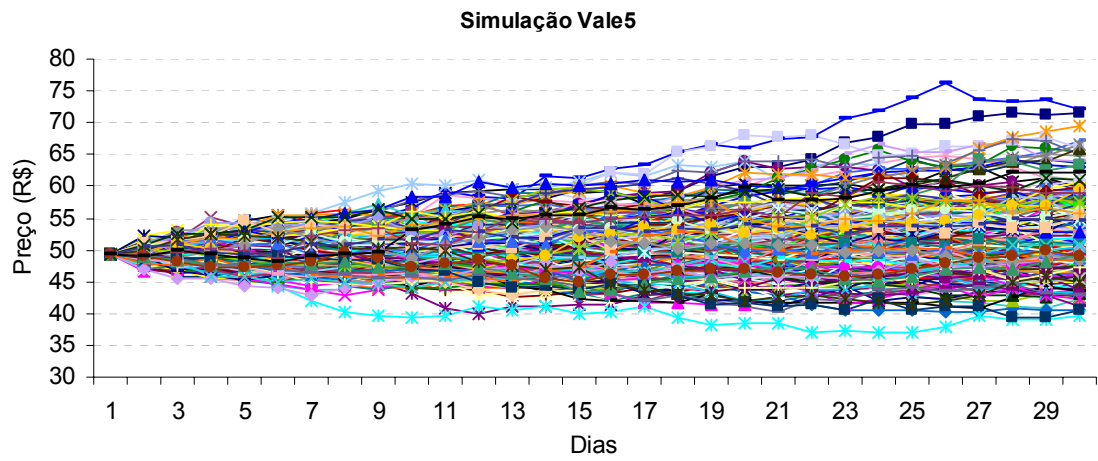


Gráfico 10. Simulação Preços VALE5

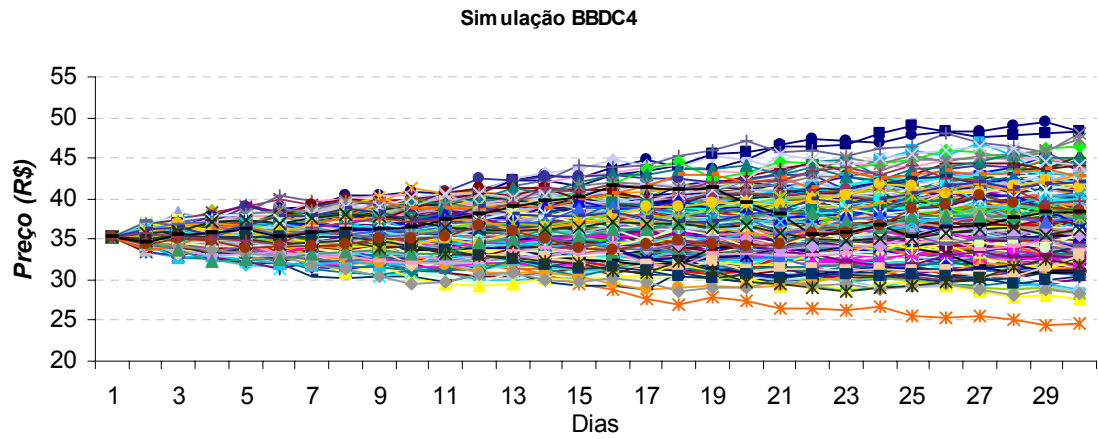


Gráfico 11. Simulação Preços BBDC4

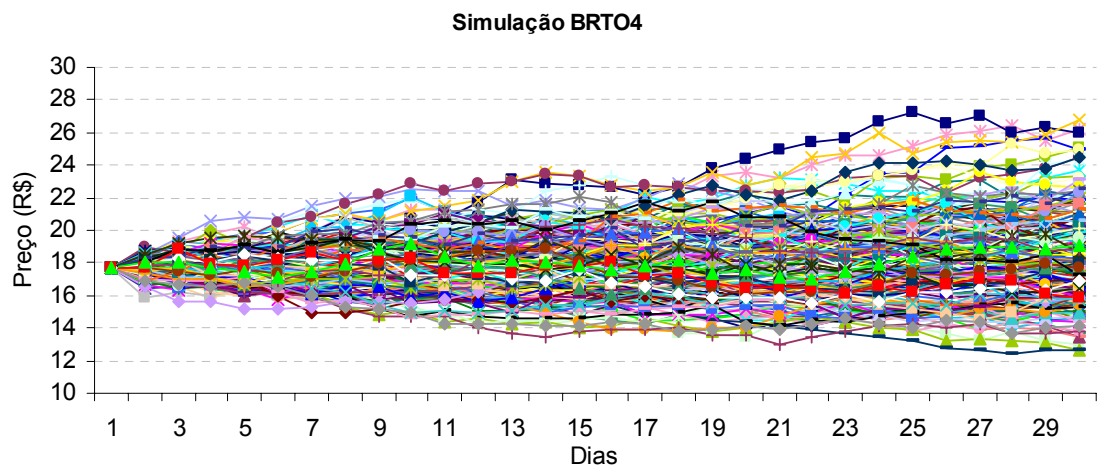


Gráfico 12. Simulação Preços BRT04

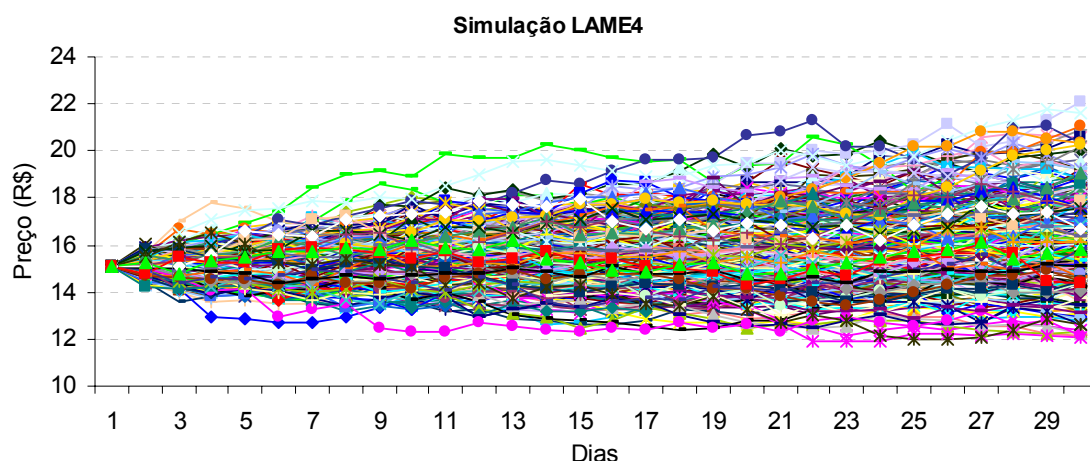


Gráfico 13. Simulação Preços LAME4

Neste trabalho, não temos por objetivo analisar de maneira mais aprofundada as questões relativas à simulação das trajetórias dos preços das ações, até mesmo porque nossa intenção é tornar os modelos de seleção de portfólio mais robustos e menos sensíveis às estimativas de retorno dos diferentes ativos, dado que esse retorno futuro apresenta grande imprevisibilidade.

Nos próximos tópicos, porém, a simulação de Monte Carlo será útil, pois três cenários definidos pela simulação serão utilizados para analisar o impacto das incertezas nos modelos de seleção de portfólio, bem como o desempenho das contrapartes robustas definidas para o modelo de DiClemente (2002).

Como cenário principal, utilizaremos o retorno médio dos ativos nas diversas simulações e como cenários alternativos foram escolhidos dois cenários definidos pela simulação de Monte Carlo, cuja soma dos preços finais das ações apresentam valor praticamente igual ao do principal, porém, com movimentos distintos para os diferentes ativos.

É importante ressaltar que estes cenários não representam critérios como esperado, positivo e negativo ou qualquer coisa do gênero, sendo simplesmente possíveis passeios aleatórios definidos através da simulação de Monte Carlo. Na tabela abaixo apresentamos o preço final e o retorno das ações nos três cenários. Uma alternativa seria utilizar cenários econômicos, porém, note que a definição dos cenários tem como objetivo analisar a sensibilidade dos modelos, visto que optamos por utilizar uma abordagem de otimização robusta contínua.

Tabela 5. Cenários base para estudo da alocação

Ação	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3	
	Preço Final (R\$)	Retorno	Preço Final (R\$)	Retorno	Preço Final (R\$)	Retorno
PETR4	45.82	5.45%	46.34	6.66%	49.55	14.04%
VALE5	51.86	5.20%	47.98	-2.68%	47.24	-4.18%
BBDC4	36.98	4.88%	37.00	4.94%	36.57	3.74%
BRT04	18.14	2.19%	20.20	13.78%	19.48	9.76%
LAME4	16.26	7.59%	17.76	17.53%	16.21	7.26%

5.3 ALOCAÇÃO EM DIFERENTES CENÁRIOS

No capítulo 4, foram apresentados dois modelos clássicos de seleção de portfólio: o de Markowitz (1952) e uma versão modificada que utiliza o CVaR como medida de risco (DiClemente, 2002). Neste tópico, analisaremos a sensibilidade destes modelos a variações no parâmetro retorno futuro dos ativos.

Para isso, calcularemos a solução ótima para cada um dos cenários em diferentes níveis de risco, definindo os portfólios ótimos de cada relação risco-retorno e consequentemente sua fronteira eficiente. Ou seja, serão definidos três modelos, cuja única diferença será o parâmetro retorno adotado para os ativos.

Posteriormente, de posse das soluções ótimas dos modelos relativos a cada um dos cenários, poderemos calcular as relações de risco-retorno destes portfólios na concretização dos demais cenários.

Dessa forma, poderemos traçar para cada um dos cenários sua fronteira eficiente, bem como as curvas de risco-retorno no caso da concretização dos demais cenários, o que nos possibilitará analisar a sensibilidade do modelo aos parâmetros incertos.

A seguir apresentaremos os resultados das análises. Os códigos para solução dos modelos de otimização foram implementados no software MATLAB, sendo os principais apresentados nos anexos.

5.3.1. Cenários aplicados ao Modelo de Markowitz

O modelo de Markowitz (1952) busca minimizar a variância do portfólio para um determinado nível de retorno esperado pelo investidor.

Dessa forma, além do retorno dos ativos também necessitamos da matriz de covariância para a definição do modelo. Em relação aos ativos estudados teríamos a seguinte matriz de covariância.

Tabela 6. Matriz de Covariância

	PETR4	VALE5	BBDC4	BRT04	LAME4
PETR4	0.000386	0.000216	0.000189	0.000195	0.000136
VALE5	0.000216	0.000435	0.000158	0.000185	0.000159
BBDC4	0.000189	0.000158	0.000419	0.000234	0.000171
BRT04	0.000195	0.000185	0.000234	0.000671	0.000183
LAME4	0.000136	0.000159	0.000171	0.000183	0.000551

Nos gráficos a seguir, traçaremos a fronteira eficiente de Markowitz dos três cenários, tomando por base os retornos esperados naquele cenário para cada ativo, definindo os portfólios ótimos de cada relação risco-retorno. Para ver, porém, o desempenho dos demais portfólios caso um determinado cenário se materialize, identificaremos as curvas dos outros cenários no contexto daquele cenário específico.

No gráfico 14, representamos a fronteira eficiente para o cenário 1 e as curvas de risco-retorno para os portfólios ótimos dos cenários 2 e 3, caso se concretizasse o cenário 1. Os gráficos 15 e 16 ilustram o mesmo efeito, porém, tomando os cenários 2 e 3, como cenário base.

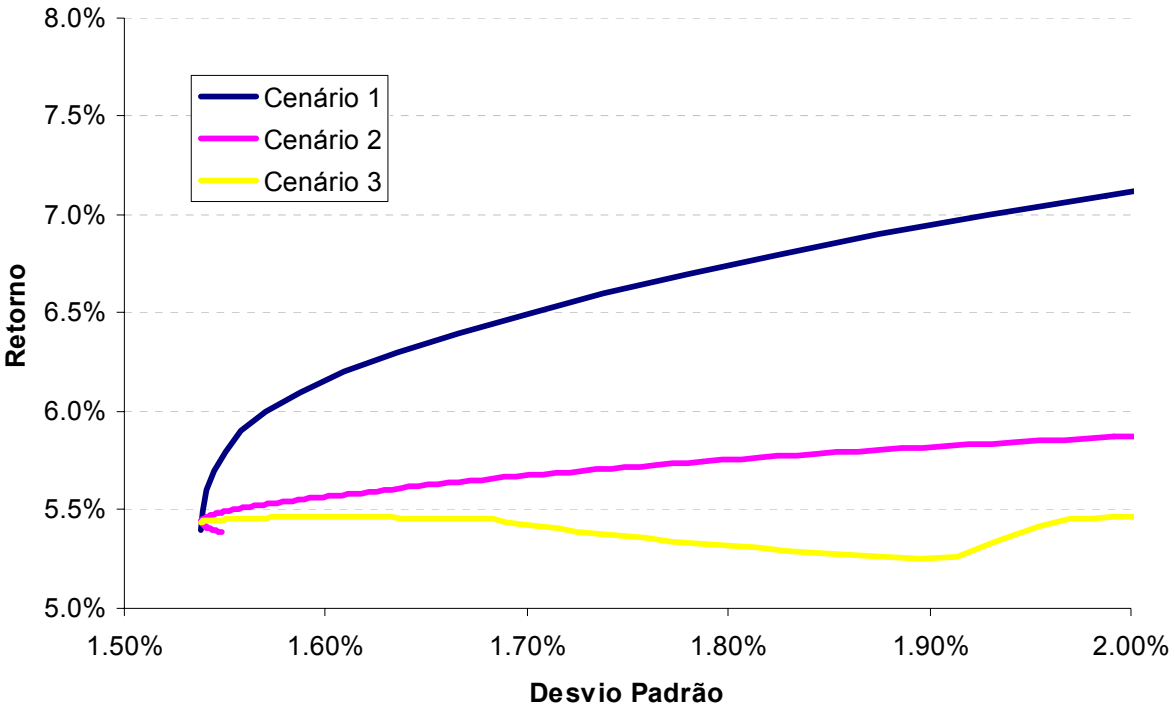


Gráfico 14. Relações de risco-retorno modelo de Markowitz tomando cenário 1 como base

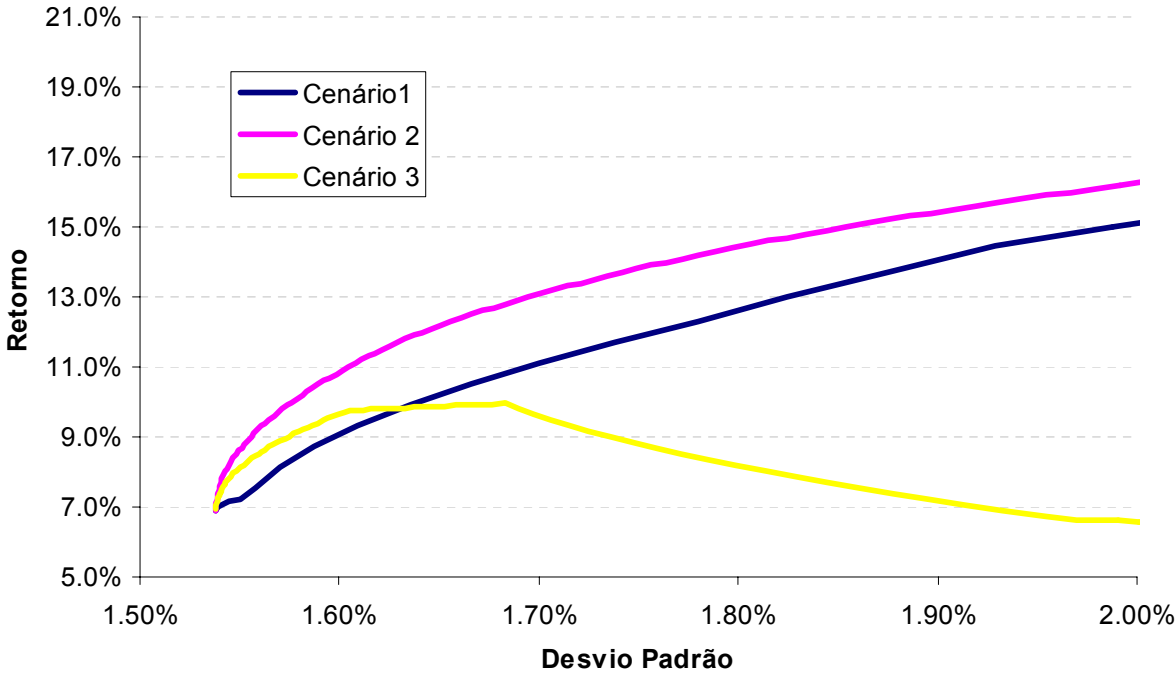


Gráfico 15. Relações de risco-retorno modelo de Markowitz tomando cenário 2 como base

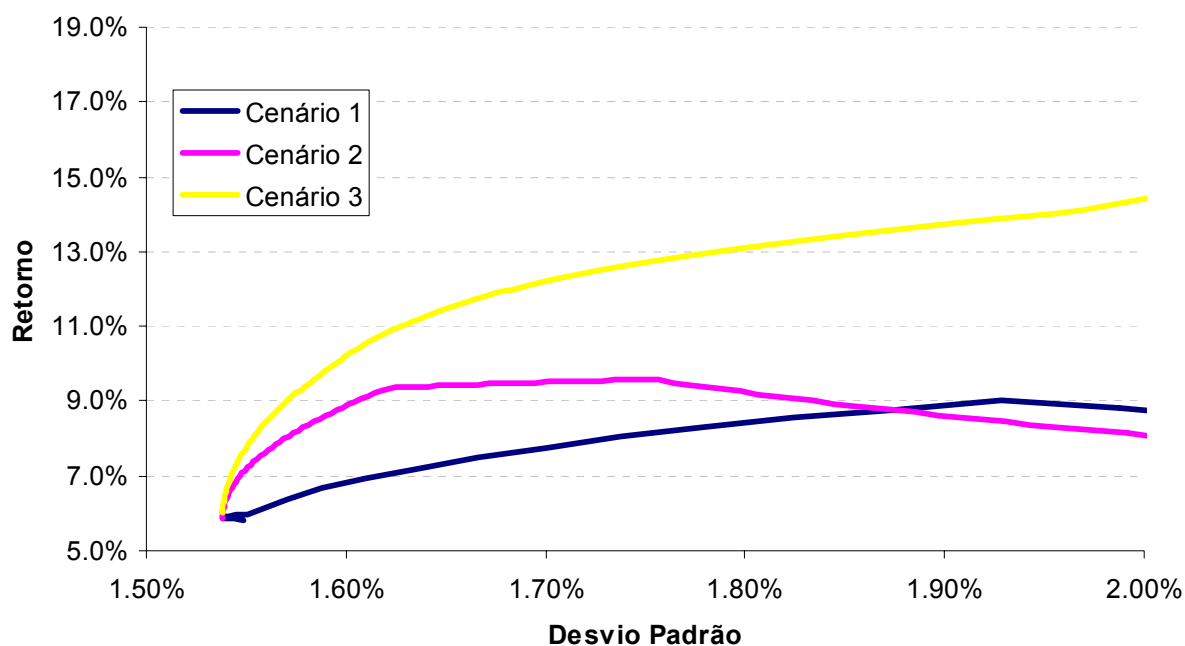


Gráfico 16. Relações de risco-retorno modelo de Markowitz tomando cenário 3 como base

Os gráficos 14, 15 e 16 indicam que os portfólios que são eficientes sob o ponto de vista da média-variância em um cenário, não o são nos demais, podendo ocasionar grande variações nas relações risco-retorno como, por exemplo, caso se concretize o cenário 3 e tenhamos optado pelo portfólio do cenário 1, teremos para um desvio padrão de 2% um retorno de aproximadamente 8,8% contra um retorno da fronteira eficiente de 14,4%. Na tabela a seguir, apresentaremos para cada um dos cenários seu retorno em relação a um determinado nível de risco.

Tabela 7. Relação risco-retorno modelo de Markowitz

Cenário Base: 1						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	1.6	6.2%	1.8	6.8%	2.0	7.1%
Cenário 2	1.6	5.6%	1.8	5.7%	2.0	5.8%
Cenário 3	1.6	5.4%	1.8	5.3%	2.0	5.4%
Cenário Base: 2						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	1.6	9.0%	1.8	12.5%	2.0	15.1%
Cenário 2	1.6	10.7%	1.8	14.4%	2.0	16.3%
Cenário 3	1.6	9.5%	1.8	8.2%	2.0	6.5%
Cenário Base: 3						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	1.6	6.9%	1.8	8.4%	2.0	8.8%
Cenário 2	1.6	8.7%	1.8	9.1%	2.0	8.1%
Cenário 3	1.6	10.0%	1.8	13.1%	2.0	14.4%

Com exceção do cenário 1, que apresentou relações de risco-retorno relativamente próximas da fronteira eficiente quando da materialização do cenário 2, podemos ver que em todas as demais situações, erros na previsão dos retornos dos ativos, levaram à composição de portfólios com relação risco-retorno ruim se comparado à fronteira eficiente.

Essa perda de desempenho das soluções previamente consideradas como ótimas se deve basicamente à diferença de alocação nos diversos ativos em função do retorno esperado para os mesmos. Na tabela a seguir, apresentaremos a alocação considerada ótima em cada cenário para os mesmos níveis de risco utilizados na tabela anterior.

Tabela 8. Alocação Ótima modelo de Markowitz para diferentes cenários

Cenário 1					
Risco	PETR4	VALE5	BBDC4	BRT04	LAME4
1.6	30%	16%	14%	0%	40%
1.8	30%	6%	0%	0%	64%
2.0	23%	0%	0%	0%	77%
Cenário 2					
Risco	PETR4	VALE5	BBDC4	BRT04	LAME4
1.6	32%	3%	16%	16%	33%
1.8	18%	0%	0%	27%	55%
2.0	0%	0%	0%	32%	68%
Cenário 3					
Risco	PETR4	VALE5	BBDC4	BRT04	LAME4
1.6	48%	1%	16%	12%	23%
1.8	83%	0%	0%	9%	8%
2.0	99%	0%	0%	1%	0%

No cenário 1, com o aumento no retorno mínimo demandado pelo investidor, maior parte do capital passou a ser alocado nas ações PETR4 e LAME4, que apresentam maior expectativa

de retorno. Dessa forma, na concretização do cenário 1, a curva de risco-retorno da solução ótima do cenário 2 apresentou pequeno aumento de retorno, pois apesar do incremento do risco, houve aumento da alocação nos ativos LAME4 e BRTO4, sendo que este último apresenta retorno inferior ao dos demais ativos no cenário 1. A mesma situação ocorreu com a solução ótima do cenário 3, porém, seu desempenho foi ainda pior pelo fato de a ação LAME4 ter sua alocação reduzida com a maior busca por retorno e o aumento na tomada de risco.

Já tomando o cenário 2 como base, a solução ótima do cenário 1 apresentou desempenho próximo ao da fronteira eficiente, devido ao aumento de alocação nas ações PETR4 e principalmente LAME4 que apresentam boa expectativa de retorno no cenário 2. No entanto, a solução ótima do cenário 3, não somente apresentou desempenho bem abaixo da fronteira eficiente, como inclusive, teve redução em seu próprio retorno com o aumento da tomada de risco devido a sua maior concentração em PETR4 e redução da alocação em BRTO4 e LAME4.

Por fim, considerando a concretização do cenário 3, as soluções ótimas dos cenários 1 e 2, também apresentaram desempenho bem inferior ao da fronteira eficiente, devido principalmente à redução de alocação em PETR4.

5.3.2. Cenários aplicados ao Modelo de DiClemente

Neste tópico, analisaremos as variações na relação risco-retorno para os diferentes cenários para o modelo que utiliza o CVaR como medida de risco.

Na implementação dos modelos serão consideradas para as variáveis $P_{t,i}$ (Preço do ativo i no instante t) séries históricas de 29 de dezembro de 2005 até 28 de dezembro de 2007 das ações analisadas. Optamos pela utilização de amostras de dois anos, pois as tradicionalmente usadas, entre 250 e 300 valores, não possibilitam uma análise adequada da cauda da distribuição de perdas e ganhos do portfólio, levando conseqüentemente a uma subavaliação do valor atual do risco (Pritsker, 2001).

Assim como no tópico anterior, traçaremos a fronteira eficiente das soluções ótimas relativas a cada um dos cenários e compararemos com as curvas de risco-retorno das soluções ótimas dos demais cenários na concretização de um cenário diferente do definido no modelo.

No gráfico 17, traçaremos a fronteira eficiente relativa ao cenário 1 e as curvas de risco-retorno dos cenários 2 e 3, considerando que se concretize o cenário 1. Os gráficos 18 e 19 ilustram o mesmo efeito, porém, tomando por base os cenários 2 e 3.

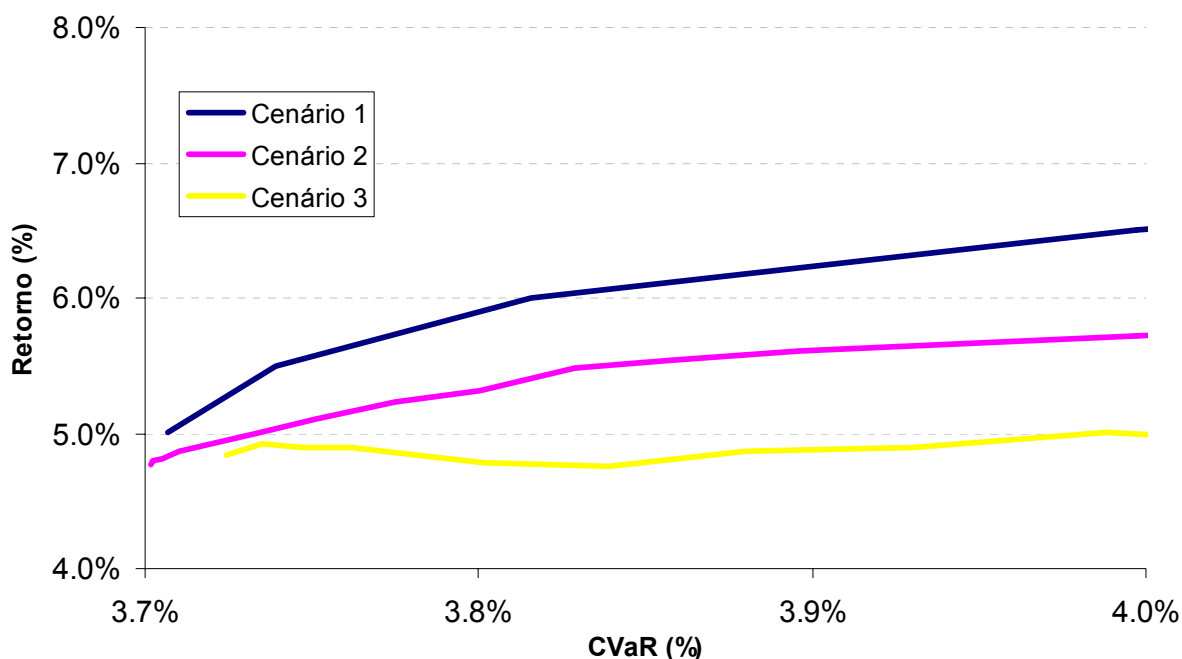


Gráfico 17. Relações de risco-retorno modelo CVaR tomando cenário 1 como base

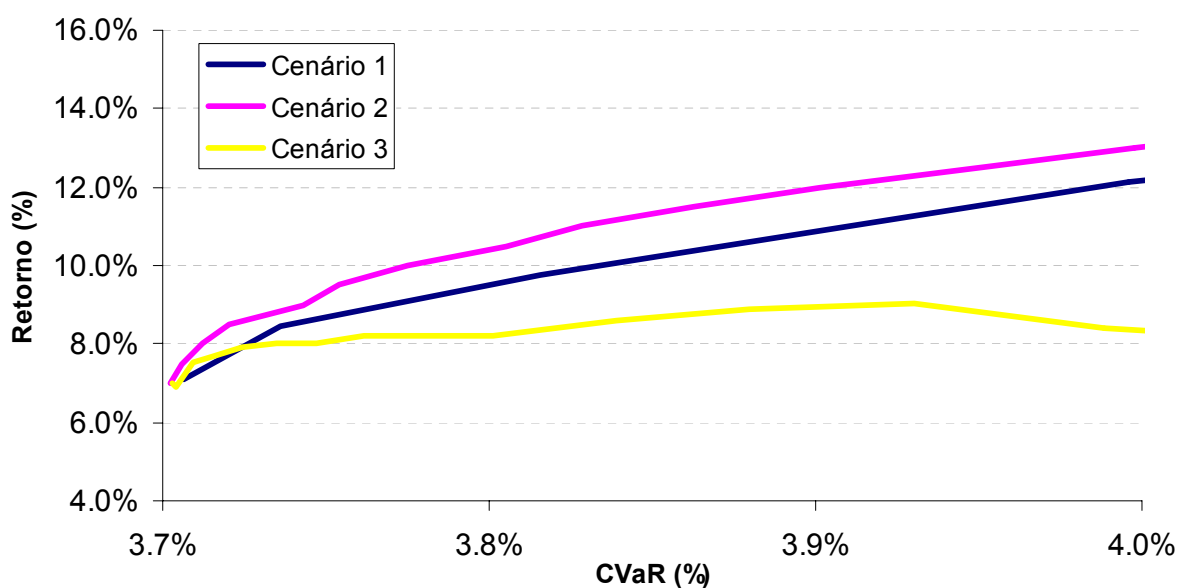


Gráfico 18. Relações de risco-retorno modelo CVaR tomando cenário 2 como base

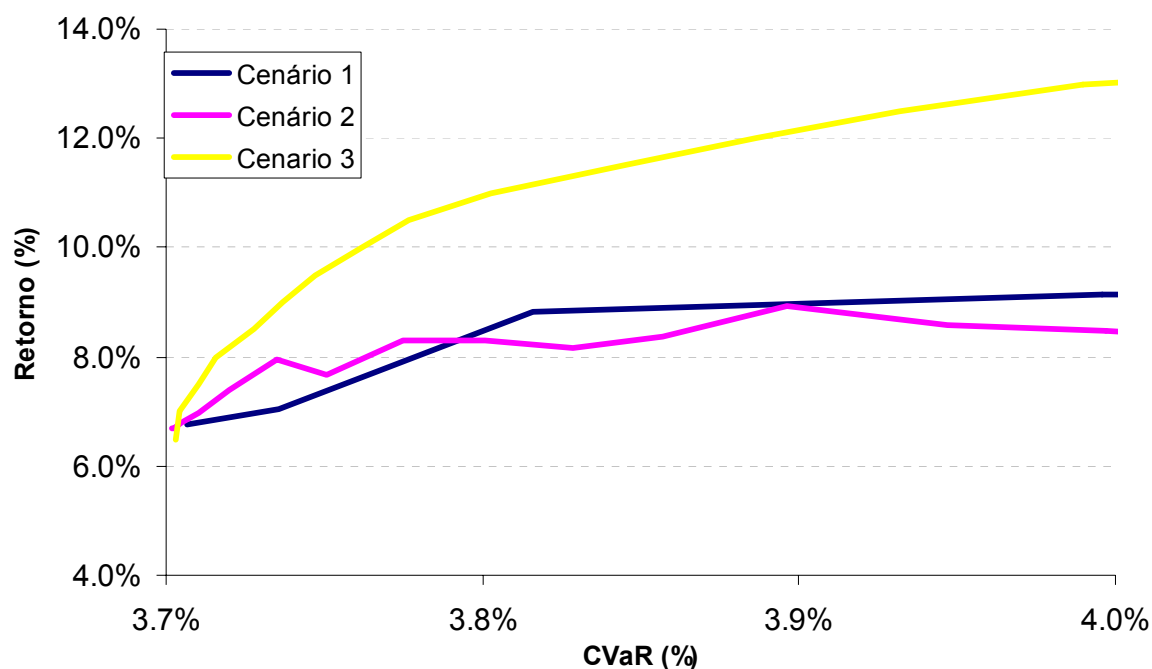


Gráfico 19. Relações de risco-retorno modelo CVaR tomando cenário 3 como base

Assim como no modelo de Markowitz (1952), com exceção da solução ótima relativa ao cenário 1, que apresentou relações de risco-retorno relativamente próximas da fronteira eficiente quando da materialização do cenário 2, em todas as demais situações, erros na previsão dos retornos dos ativos, resultaram na composição de portfólios com relação risco retorno ruim se comparado à fronteira eficiente.

No entanto, o CVaR se mostrou uma medida de risco mais robusta do que a variância. Como podemos perceber pelos gráficos anteriores e pela tabela apresentada a seguir, na concretização de diferentes cenários, as relações de risco-retorno das soluções ótimas do modelo com o CVaR como medida de risco, apresentaram menor perda de desempenho do que as soluções ótimas do modelo de Markowitz. É importante ressaltar que essa análise não é feita pela comparação direta da diferença entre os retornos para os níveis de risco apresentados, mas sim pela forma como as soluções se comportam com o incremento na tomada de risco. A comparação direta não seria válida por se tratarem de medidas de risco diferentes.

Tabela 9. Relação risco-retorno modelo de DiClemente (CVaR)

Cenário Base: 1						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	3.8	5.9%	3.9	6.2%	4.0	6.5%
Cenário 2	3.8	5.2%	3.9	5.6%	4.0	5.7%
Cenário 3	3.8	4.8%	3.9	4.9%	4.0	5.0%
Cenário Base: 2						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	3.8	9.5%	3.9	10.9%	4.0	12.2%
Cenário 2	3.8	10.5%	3.9	12.0%	4.0	13.0%
Cenário 3	3.8	8.2%	3.9	8.9%	4.0	8.2%
Cenário Base: 3						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	3.8	8.4%	3.9	9.0%	4.0	9.1%
Cenário 2	3.8	8.3%	3.9	8.5%	4.0	8.4%
Cenário 3	3.8	10.9%	3.9	12.1%	4.0	13.0%

Na tabela a seguir apresentaremos a alocação considerada ótima em cada cenário para diferentes níveis de CVaR.

Tabela 10. Alocação ótima modelo de DiClemente (CVaR) para diferentes cenários

Cenário 1					
Risco	PETR4	VALE5	BBDC4	BRT04	LAME4
3.8	35%	0%	33%	1%	31%
3.9	36%	0%	21%	0%	42%
4.0	35%	0%	13%	0%	52%
Cenário 2					
Risco	PETR4	VALE5	BBDC4	BRT04	LAME4
3.8	24%	0%	30%	18%	28%
3.9	26%	0%	16%	18%	40%
4.0	18%	0%	15%	20%	47%
Cenário 3					
Risco	PETR4	VALE5	BBDC4	BRT04	LAME4
3.8	57%	0%	19%	20%	4%
3.9	67%	0%	5%	21%	8%
4.0	77%	0%	0%	21%	2%

Assim como no modelo de Markowitz, com o aumento do risco na busca por maior expectativa de retorno, no cenário 1 a alocação passou a se concentrar mais em PETR4 e LAME4, no cenário 2 em BRT04 e LAME4 e no cenário 3, principalmente em PETR4. VALE5 que no modelo de Markowitz teve baixo nível de alocação, acabou não sendo alocada

em nenhum dos cenários no modelo de DiClemente, pois seu baixo retorno esperado, sendo inclusive negativo nos cenários 2 e 3, não compensava o acréscimo no CVaR do portfólio.

Apesar da maior robustez apresentada pelo CVaR como medida de risco, tanto o modelo de DiClemente (2002) quanto o de Markowitz (1952) se mostraram muito sensíveis ao retorno esperado para os ativos, aumentando assim, o risco dos portfólios, visto que qualquer estimativa dos retornos esperados possui grandes incertezas.

No próximo tópico, analisaremos os resultados das contrapartes robustas desenvolvidas para o modelo de DiClemente (2002).

6 RESULTADOS DOS MODELOS DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

No capítulo anterior, ilustramos que os modelos tradicionais de gestão de portfólio são muito sensíveis a variações no retorno esperado para os ativos e que a concretização de cenários diferentes do adotado no modelo pode resultar em uma grande deterioração do desempenho em relação à função objetivo.

Neste capítulo, apresentaremos os resultados computacionais da aplicação das técnicas de otimização robusta ao modelo de seleção de portfólio com o CVaR como medida de risco. Optamos pelo modelo que utiliza o CVaR, por ser uma medida de risco coerente (ARTZNER et al., 1998), por possibilitar uma análise das caudas das distribuições do retorno do ativos e por sua maior robustez em comparação à variância, como indicado no capítulo anterior.

6.1 RESULTADOS MODELO DE SOYSTER

No intuito de comparar a contraparte robusta, com o modelo original, manteremos os mesmos ativos utilizados no capítulo anterior e tomaremos os três cenários analisados, como base para a definição do intervalo para os retornos futuros dos ativos. Além disso, na implementação do modelo robusto continuaremos utilizando séries históricas de 29 de dezembro de 2005 até 28 de dezembro de 2007.

No modelo de Soyster (1973), os valores estimados para os retornos são substituídos por intervalos do tipo $[r'_i - s_i, r'_i + s_i]$, sendo r'_i e s_i respectivamente o centro e a amplitude do intervalo dentro do qual o parâmetro pode oscilar, ou seja, a resolução do modelo se manterá robusta na concretização de qualquer cenário futuro que esteja contido nesses intervalos.

Assim, para comparar a contraparte robusta com o resultado dos três cenários utilizados no capítulo anterior, definimos os intervalos para os retornos das ações como sendo limitados pelo maior e pelo menor retorno entre os três cenários, o que possibilitaria que na concretização de qualquer destes cenários o modelo se mantivesse robusto.

Desta forma, definimos o centro do intervalo (r'_i) como sendo a média entre o retorno máximo e o mínimo dentre os três cenários para o ativo i e a amplitude do intervalo (s_i) como a diferença entre r'_i e o valor mínimo dentre os cenários.

Tabela 11. Valores r'_i (centro do intervalo) e s_i (amplitude) por ativo

Ação	r'_i	s'_i
PETR4	9.7%	4.3%
VALE5	0.5%	4.7%
BBDC4	4.3%	0.6%
BRT04	8.0%	5.8%
LAME4	12.4%	5.1%

Inicialmente, com a implementação do modelo robusto, chegamos a sua solução ótima, ou seja, a composição do portfólio que maximizaria o retorno no pior cenário possível. A partir deste ponto, foi possível comparar o desempenho da solução robusta, caso se concretizasse cada um dos cenários apresentados no capítulo anterior.

Ao definir de maneira simultânea a melhor estratégia correspondente ao pior cenário possível, garantimos que o problema seja robusto e que na concretização de qualquer cenário pertencente ao intervalo definido para os parâmetros incertos, a solução robusta teria um desempenho superior ao do pior cenário possível.

Essa importante propriedade da otimização robusta pode ser percebida no gráfico abaixo, no qual apresentamos a relação risco-retorno proveniente da solução da contraparte robusta, ou seja, no pior cenário possível, e a relação risco-retorno do portfólio robusto, caso se concretizasse cada um dos três cenários apresentados no capítulo anterior.

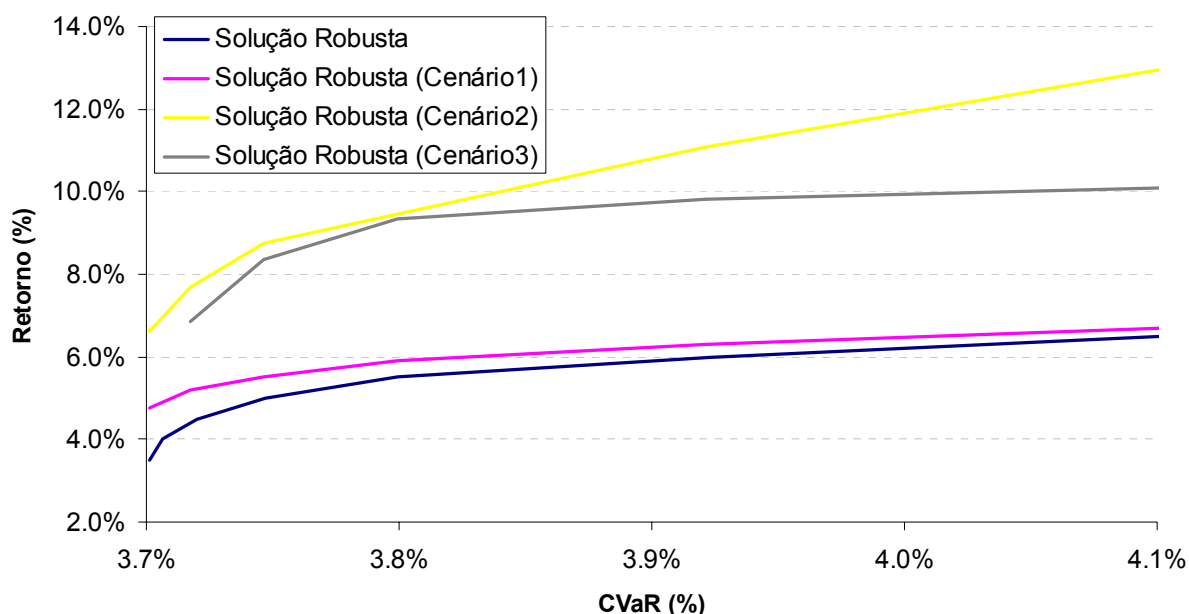


Gráfico 20. Relação risco-retorno solução robusta (Soyster) nos diferentes cenários

Como esperado, a solução robusta apresentaria desempenho superior em relação à função objetivo caso se concretizasse qualquer dos cenários pertencentes ao intervalo definido para os parâmetros retorno, que não correspondesse à pior situação possível. Porém, o desempenho da solução ótima da contraparte robusta no cenário 1, seria muito próximo ao desempenho em relação ao pior cenário possível.

Outro fator que ficou claro, nas simulações relativas à contraparte robusta do modelo de seleção de portfólio, foi que devido a sua factibilidade ao longo de todo o intervalo definido para os parâmetros incertos, garantimos que apesar da solução robusta apresentar um resultado sub-ótimo em cada um dos cenários específicos, sua performance ganha em confiabilidade, reduzindo a dependência relativa às estimativas feitas para o retorno futuro dos ativos.

Assim como no capítulo anterior, traçaremos a fronteira eficiente relativa à solução ótima de cada um dos cenários e compararemos a mesma às curvas de risco-retorno geradas pelas soluções ótimas relativas aos demais cenários. Porém, incluiremos em nossa análise a curva de risco-retorno relativa à solução ótima do modelo robusto.

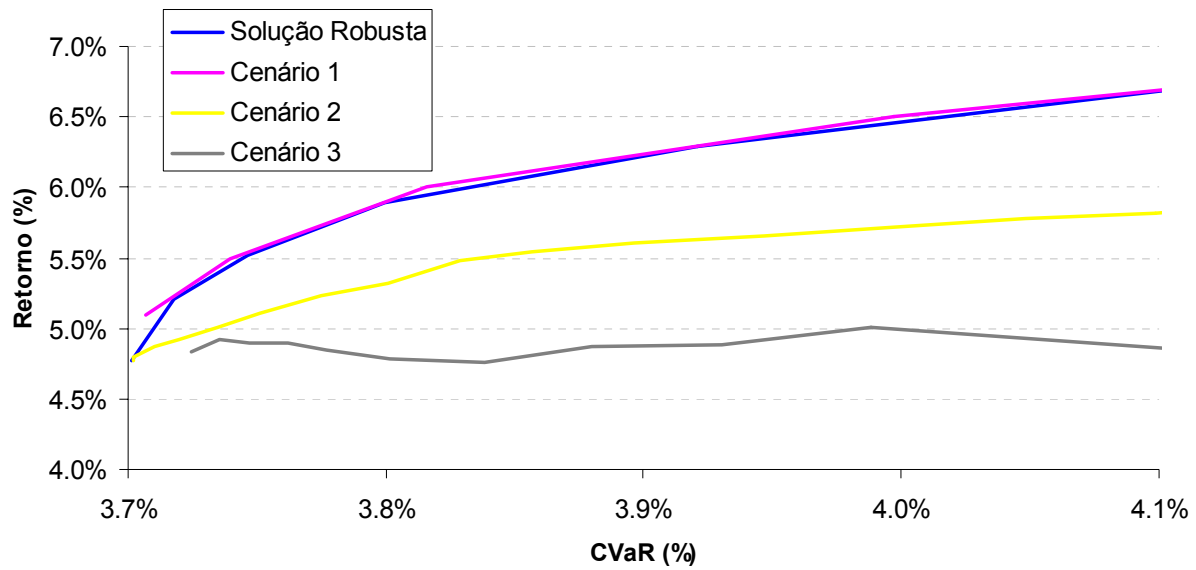


Gráfico 21. Relação risco-retorno solução robusta (Soyster) tomando cenário 1 como base

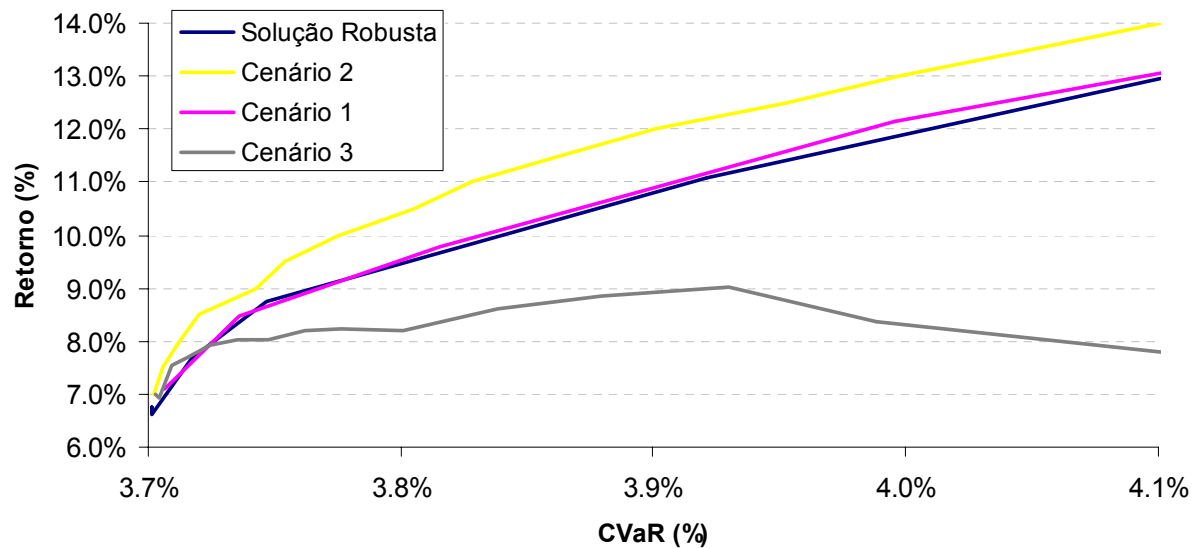


Gráfico 22. Relação risco-retorno solução robusta (Soyster) tomando cenário 2 como base

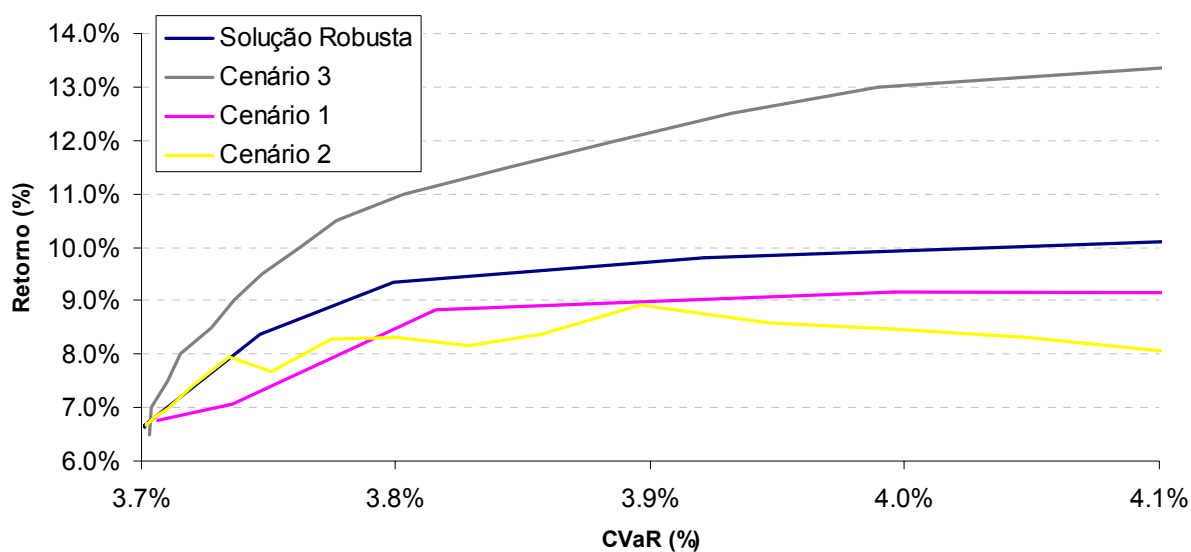


Gráfico 23. Relação risco-retorno solução robusta (Soyster) tomando cenário 3 como base

Nos gráficos apresentados, podemos ver que na concretização de qualquer dos cenários futuros, todos pertencentes ao intervalo estabelecido para os retornos, o portfólio ótimo definido pela resolução da contraparte robusta, apresentou sempre retorno consistente, apesar de sua solução ser sub-ótima para qualquer dos cenários. Para muitos investidores, essa troca de uma solução ótima, por uma que proporcione maior confiabilidade, seria bem vinda dada as grandes incertezas relativas ao retorno futuro dos ativos.

Na tabela a seguir, apresentaremos para cada um dos cenários seu retorno em relação a um determinado nível de risco, incluindo a solução ótima definida pela contraparte robusta.

Tabela 12. Relação risco-retorno modelo de DiClemente (CVaR) e contraparte robusta (Soyster)

Cenário Base: 1						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	3.8	5.9%	3.9	6.2%	4.0	6.5%
Cenário 2	3.8	5.2%	3.9	5.6%	4.0	5.7%
Cenário 3	3.8	4.8%	3.9	4.9%	4.0	5.0%
Soyster	3.8	5.9%	3.9	6.2%	4.0	6.4%
Cenário Base: 2						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	3.8	9.5%	3.9	10.9%	4.0	12.2%
Cenário 2	3.8	10.5%	3.9	12.0%	4.0	13.0%
Cenário 3	3.8	8.2%	3.9	8.9%	4.0	8.2%
Soyster	3.8	9.5%	3.9	10.8%	4.0	11.9%
Cenário Base: 3						
	Risco	Retorno	Risco	Retorno	Risco	Retorno
Cenário 1	3.8	8.4%	3.9	9.0%	4.0	9.1%
Cenário 2	3.8	8.3%	3.9	8.5%	4.0	8.4%
Cenário 3	3.8	10.9%	3.9	12.1%	4.0	13.0%
Soyster	3.8	9.3%	3.9	9.7%	4.0	9.9%

Com exceção da solução ótima do cenário 1, que na concretização do cenário 2 apresentou relação risco-retorno ligeiramente superior à da solução robusta, na concretização dos demais cenários, a solução robusta perdeu somente para as respectivas fronteiras eficientes.

Conforme explicamos anteriormente, esse bom desempenho da solução robusta em diferentes cenários se deve ao fato de na contraparte robusta otimizarmos em relação ao pior cenário possível, mantendo assim, a solução factível dentro de todo o intervalo I definido para os parâmetros incertos. Na tabela a seguir, apresentaremos a alocação considerada ótima em cada cenário para diferentes níveis de CVaR, incluindo a alocação definida pelo modelo robusto.

Tabela 13. Alocação ótima modelo de DiClemente e da Contraparte Robusta (Soyster) para diferentes cenários e níveis de risco

Cenário 1					
Risco	PETR4	VALE5	BBDC4	BRT04	LAME4
3.8	35%	0%	33%	1%	31%
3.9	36%	0%	21%	0%	42%
4.0	35%	0%	13%	0%	52%
Cenário 2					
Risco	PETR4	VALE5	BBDC4	BRT04	LAME4
3.8	24%	0%	30%	18%	28%
3.9	26%	0%	16%	18%	40%
4.0	18%	0%	15%	20%	47%
Cenário 3					
Risco	PETR4	VALE5	BBDC4	BRT04	LAME4
3.8	57%	0%	19%	20%	4%
3.9	67%	0%	5%	21%	8%
4.0	77%	0%	0%	21%	2%
Soyster					
Risco	PETR4	VALE5	BBDC4	BRT04	LAME4
3.8	45%	0%	27%	0%	28%
3.9	44%	0%	16%	0%	40%
4.0	43%	0%	7%	0%	49%

Pela forma como foi construído o intervalo de oscilação do retorno das ações, no intuito de englobar no mesmo os três cenários analisados, as ações VALE5 e BRT04 não fizeram parte do portfólio definido pelo modelo de otimização. VALE4 com centro do intervalo de expectativa de retorno (r'_i) em 0,5% e amplitude de oscilação (s_i) de 4,7% apresentaria retorno negativo no pior cenário possível, e BRT04 com centro em 8% e amplitude de 5,8%, apresentaria no pior cenário possível, baixa expectativa de retorno com alto nível de risco.

Além disso, pela boa expectativa de retorno no pior cenário possível, a ação PETR4 teria grande alocação em diferentes níveis de risco. Por sua vez, a ação LAME4 teria maior participação no portfólio com o aumento na demanda por retorno e redução da aversão a risco, pois apesar de apresentar a maior expectativa de retorno no pior cenário possível dentre os cinco ativos, gerava grande incremento no risco do portfólio.

Apesar de tornar o modelo mais robusto, a abordagem de Soyster (1973) pode produzir soluções muito conservadoras. No intuito de analisar os resultados da otimização robusta do modelo e comparar com os cenários utilizados no capítulo anterior, definimos intervalos com uma amplitude não muito conservadora e nos quais a diferença entre o retorno esperado (r'_i) e a amplitude do intervalo simétrico (s_i) correspondia à pior situação entre os três cenários. Isso

não descarta todos os benefícios do modelo de Soyster apresentados anteriormente, mas indicam que para aumentar a robustez do modelo em relação a uma maior gama de cenários futuros, poderíamos ter que aceitar resultados muito inferiores à solução ótima, podendo inviabilizar a utilização da otimização robusta na vida real.

Para demonstrar isso, recalculamos a contraparte robusta do modelo, porém, utilizando intervalos com amplitude superior à originalmente definida. Aumentamos a amplitude do intervalo do parâmetro retorno para cada ativo, em respectivamente 25 e 50%.

Tabela 14. Valores s_i para diferentes intervalos

Ação	S_i 1	S_i 2	S_i 3
PETR4	4.3%	5.4%	6.5%
VALE5	4.7%	5.9%	7.0%
BBDC4	0.6%	0.8%	0.9%
BRT04	5.8%	7.2%	8.7%
LAME4	5.1%	6.4%	7.7%

O gráfico a seguir indica a redução do desempenho da solução robusta devido ao aumento da amplitude do intervalo dos parâmetros retorno, pois quanto maior a amplitude mais se abdica da solução ótima em função da robustez do modelo. Por isso, a fronteira eficiente da contraparte robusta do modelo de seleção de portfólio apresenta maior desempenho quando utilizamos o intervalo I com amplitude s_i 1, e pior quando usamos o intervalo I com amplitude s_i 3.

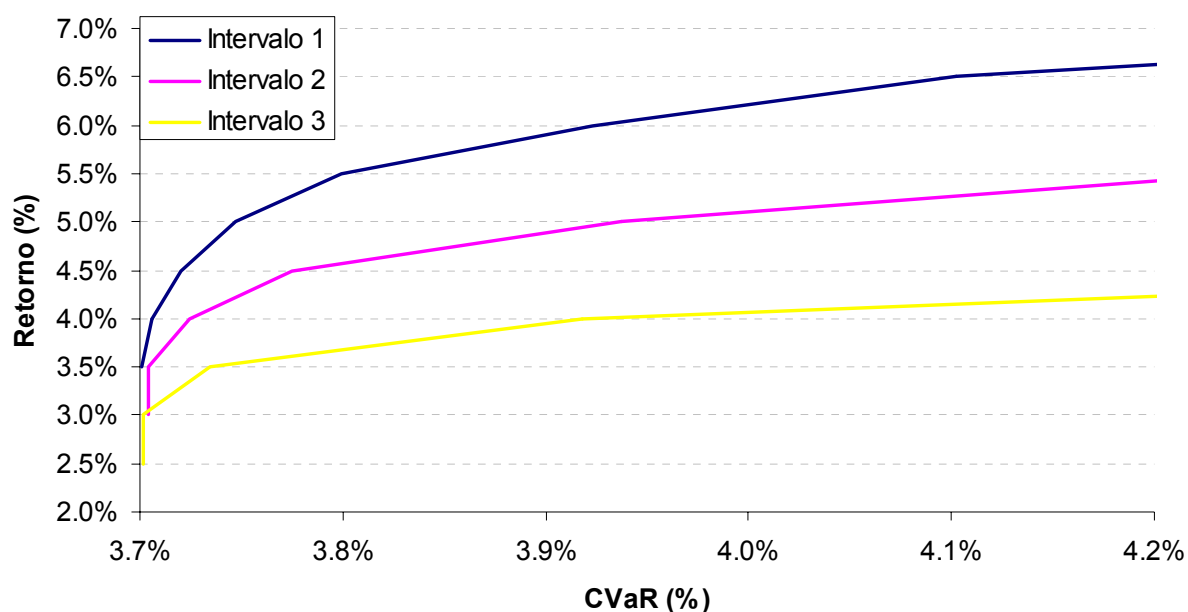


Gráfico 24. Fronteira eficiente modelo robusto (Soyster) para diferentes amplitudes de intervalo do parâmetro retorno

6.2 RESULTADOS MODELO DE BERTSIMAS E SIM

Através do desenvolvimento de um modelo robusto de seleção de portfólio com base na abordagem de Bertsimas e Sim (2004), mantivemos a contraparte robusta do modelo linear e possibilitamos o controle do conservadorismo do mesmo, através da utilização do parâmetro Γ .

Quanto menor o valor definido para o parâmetro Γ , menos conservador será o modelo, pois se exclui a possibilidade de grandes variações para o retorno dos ativos, que são os parâmetros incertos presentes em nosso modelo. A diferença entre os piores valores possíveis para os parâmetros e seus valores nominais não poderá ser muito grande para que o problema se mantenha factível.

Em contrapartida, quanto mais o valor do parâmetro Γ se aproxima do número de parâmetros incertos presentes na restrição, maior a equivalência do modelo de Bertsimas e Sim (2004) com o proposto por Soyster (1973).

O modelo de otimização robusta obtido a partir da aplicação da abordagem de Bertsimas e Sim (2004), foi testado com base nos mesmo cenários utilizados para o modelo original e para o modelo robusto com base na abordagem de Soyster (1973).

Assim como na contraparte robusta proveniente da abordagem de Soyster (1973), o retorno esperado para os ativos (r'_i) e a amplitude dos intervalos (s_i) foram definidos de forma que a diferença entre os mesmos resultasse no pior caso possível para os três cenários. Os valores r'_i e s_i , já foram apresentados na tabela 11.

Como nosso modelo possui como parâmetros incertos o retorno esperado para os cinco ativos analisados na carteira de portfólio, simulamos o mesmo para valores inteiros de Γ , variando de 1 a 5.

No gráfico 25, apresentaremos as fronteiras eficientes do modelo para os diferentes valores de Γ analisados. O gráfico indica que o valor ótimo do problema diminui com o incremento no valor de Γ , ou seja, com o aumento da amplitude total de oscilação dos parâmetros incertos.

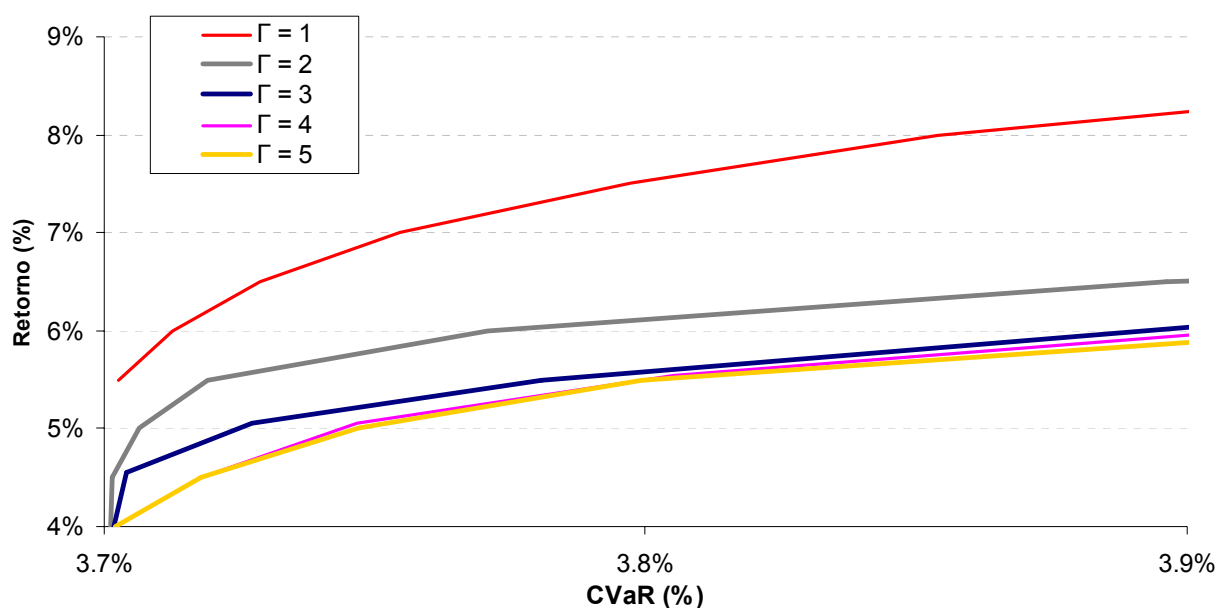


Gráfico 25. Fronteira eficiente para diferentes valores de Γ

Quanto menor o valor adotado para o parâmetro Γ , melhor a relação de risco-retorno apresentada pelas fronteiras eficientes. Na variação do parâmetro Γ de 1 para 2, podemos perceber uma grande variação entre as fronteiras eficientes, deterioração esta, que vai ficando cada vez maior com o incremento no valor de Γ . Para Γ igual a 4 e 5, as fronteiras eficientes praticamente se sobrepõem devido à proximidade com o pior cenário possível.

Na abordagem de Betsimas e Sim (2004) ao adotarmos o valor de Γ igual ao número de ativos do portfólio o modelo se torna igual ao de Soyster (1973), pois o coeficiente $|r_i - r'_i|/s_i$ pode assumir valor igual a 1 para todos os ativos sem que haja limitações pela restrição do “preço da robustez”. Assim, para $\Gamma = 5$, os parâmetros podem variar em toda a dimensão do intervalo, sendo equivalente ao pior cenário descrito por Soyster (Bohle et al., 2008).

Ou seja, analisando o gráfico 25, podemos ver que é possível controlar o conservadorismo e consequentemente o desempenho do modelo através de alterações no parâmetro Γ , porém, sem reduzir a robustez do modelo na mesma proporção, pois essa limitação dos intervalos faz parte do modelo. Ao inserirmos a função β que visa maximizar a proteção do modelo para determinado parâmetro Γ , garantimos que será definida a maior proteção possível para aquele nível de oscilação total dos parâmetros incertos. No gráfico 25, podemos perceber esse efeito, dado que o decréscimo de desempenho de relação risco-retorno é muito maior de $\Gamma=1$ para $\Gamma=2$ do que de $\Gamma=4$ para $\Gamma=5$.

Através do parâmetro Γ limitamos a amplitude de oscilação do portfólio como um todo, pois conforme apresentamos anteriormente, a restrição do “preço de robustez” é definida como:

$$S = \{ A \in R^{m \times n}: a_{ij} \in [a'_{ij} - s_{ij}, a'_{ij} + s_{ij}], \forall i, j; (\sum_{i=1}^n (|a_{ij} - a'_{ij}|/s_{ij})) < \Gamma, \forall i \}$$

Dessa forma, a distribuição do tamanho dos intervalos fica inserida como parte do modelo, por isso, o decréscimo do desempenho apresentado no gráfico 25 é muito distinto para diferentes valores de Γ , enquanto que no modelo de Soyster (1973), o aumento da amplitude dos intervalos em 25 e 50% gerou quedas de desempenho proporcionais nas relações de risco-retorno, conforme apresentado pelas fronteiras eficientes do gráfico 24.

Os resultados da simulação da contraparte robusta confirmaram que através da utilização da abordagem criada por Betsimas e Sim (2004), podemos controlar o conservadorismo do modelo de seleção de portfólio, evitando que se considere que o pior cenário possível se concretize simultaneamente para todos os ativos.

7 CONCLUSÃO

Ao final do percurso empreendido para desenvolver o tema proposto, apresentaremos as principais conclusões da aplicação de otimização robusta ao modelo de seleção de portfólio e indicaremos pontos para extensões futuras.

7.1 CONCLUSÕES DO TRABALHO

Neste trabalho, nos propusemos a estudar formas de reduzir a sensibilidade de modelos de seleção de portfólio a parâmetros incertos, através de aplicação de técnicas de otimização robusta.

Para testar a sensibilidade dos modelos de seleção de portfólio à variabilidade e imprevisibilidade em relação ao valor futuro dos ativos, calculamos a solução ótima para três cenários definidos por simulação de Monte Carlo e seu desempenho na concretização dos demais cenários.

Tanto no modelo de Markowitz (1952) quanto no de DiClemente (2002), que utilizam respectivamente a variância e o CVaR como medida de risco, na materialização de um cenário diferente do utilizado no modelo, as soluções previamente consideradas como ótimas sofreram grande perda de desempenho, resultado em relações de risco-retorno ruins.

Apesar de ambos os modelos terem se mostrado sensíveis ao retorno esperado para os ativos, optamos trabalhar com o de DiClemente (2002), não somente por ser o CVaR uma medida de risco coerente (ARTZNER et al., 1998), que analisa as caudas da distribuição de probabilidades e possibilita trabalhar o problema de seleção de portfólio como um modelo linear, mas também, devido ao CVaR ter se mostrado uma medida de risco mais robusta do que a variância em nossas análises.

Através da utilização de otimização robusta foi possível reduzir a dependência do modelo ao retorno futuro esperado para os ativos. As contrapartes robustas definidas possibilitaram a

seleção de carteiras com desempenho consistente, apesar de sua solução ser sub-ótima para qualquer dos cenários.

Além disso, na concretização de cenários pertencentes ao intervalo definido para os parâmetros retorno dos ativos, a solução robusta apresentou sempre desempenho superior ao do pior cenário possível. Dessa forma, dentro do intervalo definido para os parâmetros incertos, mudanças no cenário só geraram aumento do desempenho da solução ótima da contraparte robusta, ao contrário do que aconteceu para o modelo original.

Para alcançar os resultados mencionados acima, foram utilizadas duas abordagens de otimização robusta, a de Soyster (1973) e a de Bertsimas e Sim (2004).

Soyster foi um dos pioneiros no estudo de otimização robusta e sua abordagem possui como vantagem o fato de possibilitar que a contraparte robusta de um modelo de programação linear, continue sendo linear, demandando menor poder computacional para a resolução do problema. Porém, com o aumento da amplitude do intervalo de oscilação dos parâmetros retorno, a contraparte robusta proveniente da abordagem de Soyster (1973) resultou em soluções com baixo desempenho se comparado à fronteira eficiente.

O modelo de Soyster (1973) possibilitou a redução da sensibilidade do modelo de seleção de portfólio ao valor futuro dos ativos, porém, com o aumento do intervalo de oscilação dos parâmetros incertos, suas soluções se mostraram conservadoras em função de considerar que o pior cenário se concretizasse simultaneamente para todos os ativos, o que seria muito improvável.

No entanto, através da adaptação do modelo de Bertsimas e Sim (2004) ao problema de seleção de portfólio foi possível manter a contraparte robusta do modelo linear, porém, controlando seu conservadorismo mediante alterações no parâmetro Γ . Quanto menor o valor de Γ inserido no modelo robusto, maiores foram as relações de risco-retorno.

Reduções no valor de Γ geraram soluções com maiores relações de risco-retorno, porém, sem reduzir a robustez do modelo na mesma proporção, pois a função β de controle da oscilação total dos parâmetros incertos foi inserida como parte do modelo de otimização robusta. Com isso, alterações no parâmetro Γ geraram variações não lineares no desempenho das soluções do modelo robusto baseado em Bertsimas e Sim (2004), enquanto que no modelo baseado na

abordagem de Soyster (1973), o aumento da amplitude do intervalo de oscilação em 25 e 50% gerou quedas de desempenho proporcionais.

7.2 *FUTURAS EXTENSÕES*

Ao longo deste trabalho foram levantados alguns pontos importantes que podem ser utilizados como referência para futuras extensões.

Pela natureza do problema, optamos por trabalhar os modelos de otimização com intervalos contínuos de oscilação para os parâmetros incertos, porém, em outros estudos pode-se futuramente analisar modelos que utilizassem intervalos discretos baseados em cenários econômicos.

Novos estudos podem utilizar um número maior de ativos, que englobasse não somente ações, mas também derivativos.

Adicionalmente, as técnicas de otimização robusta estudadas neste trabalho e as ferramentas desenvolvidas podem ser aplicadas a diferentes problemas de engenharia de produção.

BIBLIOGRAFIA

- ARCHER, N.P., GHASEMZADEH, F. **An integrated framework for project portfolio selection.** *International journal of Project Management*, v.17, p.207-216, 1999.
- ARTZNER, P. et al. **Coherent measures of risk.** *Mathematical Finance*, v.9, p.203-208, 1998.
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. **Robust Solutions of linear programs,** *Operations Research*. v.25, p.1-13. 1999.
- BERTSIMAS, D.; SIM, M. **The Price of Robustness,** *Operations Research*. v.52, p.35-53. 2004.
- BEYER, H.G. e SENDHOFF, B. **Robust Optimization – A comprehensive survey,** *Computer methods in applied mechanics and engineering* . v.196, p.3190-3218, 2007.
- BOHLE, C. et. al. **A robust optimization approach to wine grape harvesting scheduling,** *European Journal of Operational Research*, doi:10.1016/j.ejor.2008.12.003, 2009.
- DICLEMENTE, A.L. (2002). **The empirical value at risk-expected return frontier: A useful tool of Market risk managing.** Working Paper n.11. Università di Roma. (<http://w3.inioroma1.it/cidem>), 2002.
- ESCUADERO, L.F. et al. **Production Planning via scenario modeling,** *Annals of Operations Research*, v.43, p.311 – 335, 1993.
- FABBOZI, F.J. et al. **Robust Portfolio Optimization and Management,** John Wiley & Sons, New Jersey, 2007.
- GAIVORONSKI, A.A.; PFLUG, G. **Value at Risk in portfolio optimization: properties and computational approach.** University of Vienna 2001.
- HULL, J.C. **Fundamentos dos Mercados Futuros e de Opções.** São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuros, 2005.
- JAMMERNEGG, W. e KISCHKA, P. **Risk preferences and robust inventory decisions,** *International Journal of production Economics*. v.118, p.269-274, 2009.
- KROKHMAL, P. e URYASEV, S. **Portfolio Optimization with conditional value-at-risk objective and constraints,** *The Journal of Risk*, v.4, p.11-27, 2001.
- LIESIO, J., MILD, P. e SALO, A. *Preference programming for robust portfolio modeling and project selection,* *European Journal of Operational Research*, v.181, p.1488-1505, 2007.

LIST, G. et al. **Robust optimization for fleet planning under uncertainty**, *Transportation Research*. v.39, p.209-227, 2003.

MARKOWITZ, H. M. **Portfolio Selection**, *Journal of Finance*, v.7, p.77-91, 1952.

NETO, P.L.O.C.; CYMBALISTA, M. **PROBABILIDADES**. São Paulo: Edgard Blucher Ltda., 2006.

PARASKEVOPOULOS, D., KARAKITSOS, E., RUSTEM, B. **Robust capacity planning under uncertainty**. *Management Science*, v.37, p.787-800, 1991.

PRITSKER, M. **The hidden dangers of historical simulation**. *Working Paper*. Federal Reserve Board, Março.2001

QUARANTA, A.G.; ZAFFARONI, A. **Robust Optimization of conditional value at risk**, *J. Bank Finance*, doi:10.1016/j.jbankfin.2007.12.025, 2008.

RIBEIRO, C.O; FERREIRA, L.A.S. **Uma contribuição ao problema de composição de carteiras de mínimo valor em risco**. *Gestão e Produção*, v.12, p.295-304, 2004.

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S. **Optimization of conditional value-at-risk**. *Journal of Risk*, v.2, p.21-41, 2000.

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S. **Conditional value at risk for general loss distributions**, *J. Bank. Financ.* V.26, p.1443-1447, 2002.

RUSTEM, B.; HOWE, M. **Algorithms for worst-case design and applications to risk management**. New Jersey: Princeton University Press, 2002.

SIM, M. **Robust Optimization**. Massachusetts Institute of Technology, 2004. (Tese de Doutorado)

SOYSTER, A.L. **Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming**. *Oper. Res.*, v.14, p.1154-1151, 1973.

WINSTON, W. **Operations research**. Belmont, CA: Thomson, 2004.

YU, C.; LI, H. **A robust optimization model for stochastic logistic problems**. *International Journal of Production Economics*, v.64, p.385-397, 2000.

ANEXO I – MODELO DE MARKOWITZ

Apresentamos a seguir o código utilizado para o cálculo da fronteira eficiente, com base no modelo de Markowitz (1952). Para cada um dos três cenários analisados no estudo, tivemos que adaptar o modelo através da alteração no retorno esperado para os ativos.

```
%Cálculo Fronteira Eficiente

%Leitura Matriz de covariância
matrizcov=xlsread('C:\dados','C4:G8');

%Vetor retorno médio por ativo
retorno=xlsread('C:\dados','B15:B19');

%Limite inferior
inf=[0;0;0;0;0];

matrizcov=(matrizcov)*10000;

%Informações para função quadprog
H=matrizcov/0.5;
Aeq=[retorno';1 1 1 1 1];
retorno_minimo= Valor mínimo;
n=1;

while retorno_minimo < Valor máximo
    beq=[retorno_minimo;1];
    [x,fval]=quadprog(H,[],[],[],Aeq,beq,inf,[])
    k=1;
    while k<6
        A(n,k)=x(k);
        k=k+1;
    end
    A(n,6)=x'*retorno;
    A(n,7)=x'*matrizcov*x;
    n=n+1;
    retorno_minimo=retorno_minimo+0.001;
end

%A(n,1-6:Portfolio);A(n,7:retorno);A(n,8:Variancia)

xlswrite('C:\Fronteira_eficiente',A,1,'A2');
```

ANEXO II – MODELO DE DICLEMENTE

Apresentamos a seguir o código utilizado para o cálculo da fronteira eficiente, com base no modelo de DiClemente (2002). Para cada um dos três cenários analisados no estudo, tivemos que adaptar o modelo através da alteração no retorno esperado para os ativos.

```
%Leitura variação preço dos ativos
P = xlsread('C:\InfCVaR', 'A:E');

%Leitura vetor retorno esperado
r = xlsread('C:\dados', 'B15:B19');

%Definição constante produto na função de minimização
h = 1/(491*(1-0.95));

%Vetor função minimização f=(1,h,h,...,h,0,0,0,0,0)
f = zeros(1+491+5,1);
f(2:492,1) = h;
f(1,1) = 1;

%Definição limite inferior
lb = zeros(1+491+5,1);
lb(2:1+491+5,1) = 0;
lb(1)=-10000;

% Informações para função linprog (Restrição A*X<B)

B = zeros(491,1);
A = zeros(491,1+491+5);
A(:,1)= 1;
A(:,2:1+491) = eye(491);
A(:,2+491:1+491+5)= P;
A = -A;

%Retorno esperado inicial
G = Retorno mínimo;
i = 1;

%Loop para definir fronteira eficiente
while G <= Retorno máximo

%Restrição Aeq*X=beq

beq = [1,G];
Aeq = zeros(2,1+491+5);
Aeq(1,2+491:1+491+5) = 1;
Aeq(2,2+491:1+491+5)= r';
```



```
%função minimização
[x,fval]=linprog(f,A,B,Aeq,beq,lb,[]);

%Matriz informações
C(i,1) = fval*100;
C(i,2) = x(1)*100;
C(i,3) = G;
C(i,4)= x(493);
C(i,5) = x(494);
C(i,6) = x(495);
C(i,7) = x(496);
C(i,8) = x(497);

G = G + 0.005;
i = i + 1;

end

xlswrite('C:\ResultCVaR',C,1,'A2');
```

ANEXO III – CONTRAPARTE ROBUSTA (SOYSTER)

Apresentamos a seguir o código utilizado para o cálculo da contraparte robusta definida com base no modelo de Soyster (1973).

```
%Leitura variação preço dos ativos
P = xlsread('C:\InfCVaR', 'A:E');

%Leitura vetor retorno esperado (ri' utilizado na definição do intervalo de
Soyster)
r = xlsread('C:\dados', 'G38:G42');

%Leitura do vetor amplitude retorno (Si)- Intervalo Soyster
s = xlsread('C:\dados', 'H38:H42');

%Definição constante produto na função de minimização
h = 1/(491*(1-0.95));

%Vetor função minimização f=(1,h,h,.....,h,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
f = zeros(1+491+10,1);
f(2:492,1) = h;
f(1,1) = 1;

% Informações para função linprog (Restrição A*X<B)

B = zeros(491+10,1);
A = zeros(491+10,1+491+10);
A(1:491,1)= 1;
A(1:491,2:1+491) = eye(491);
A(1:491,2+491:1+491+5)= P;
A(491+1,491+2) = 1;
A(491+1,491+7) = 1;
A(491+2,491+2) = -1;
A(491+2,491+7) = 1;
A(491+3,491+3) = 1;
A(491+3,491+8) = 1;
A(491+4,491+3) = -1;
A(491+4,491+8) = 1;
A(491+5,491+4) = 1;
A(491+5,491+9) = 1;
A(491+6,491+4) = -1;
A(491+6,491+9) = 1;
A(491+7,491+5) = 1;
A(491+7,491+10) = 1;
A(491+8,491+5) = -1;
A(491+8,491+10) = 1;
A(491+9,491+6) = 1;
A(491+9,491+11) = 1;
A(491+10,491+6) = -1;
A(491+10,491+11) = 1;
```

```

A = -A;

%Definição limite inferior
lb = zeros(1+491+10,1);
lb(1)=-10000;

%Retorno esperado inicial
G = Retorno mínimo;
i = 1;

%Loop para definir fronteira eficiente
while G <= Retorno Máximo

%Restrição Aeq*X=beq

beq = [1;G];
Aeq = zeros(1,1+491+10);
Aeq(1,2+491:1+491+5) = 1;
Aeq(2,2+491:1+491+5) = r';
Aeq(2,498:502) = -s';

%função minimização
[x,fval]=linprog(f,A,B,Aeq,beq,lb,[]);

%Matriz informações

C(i,1) = fval*100;
C(i,2) = x(1)*100;
C(i,3) = G;
C(i,4)= x(493);
C(i,5) = x(494);
C(i,6) = x(495);
C(i,7) = x(496);
C(i,8) = x(497);
C(i,9)=x(498);
C(i,10)=x(499);
C(i,11)=x(500);
C(i,12)=x(501);
C(i,13)=x(502);

G = G + 0.005;
i = i + 1;

end

xlswrite('C:\ResultCVarRobustSoyster',C,1,'A2');

```

ANEXO IV – CONTRAPARTE ROBUSTA (BERTSIMAS E SIM)

Apresentamos a seguir o código utilizado para o cálculo da contraparte robusta definida com base no modelo de Bertsimas e Sim (2004). Na resolução do modelo para diferentes valores de Γ , tivemos que adapta-lo através de variações no parâmetro gama.

```
%Leitura variação preço dos ativos
P = xlsread('C:\InfCVaR', 'A:E');

%Leitura vetor retorno esperado
r = xlsread('C:\dados', 'G38:G42');

%Leitura do vetor amplitude retorno (Si)
s = xlsread('C:\dados', 'H38:H42');

%Definição constante produto na função de minimização
h = 1/(491*(1-0.95));

%Vetor função minimização f=(1,h,h,...,h,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
f = zeros(1+491+16,1);
f(2:492,1) = h;
f(1,1) = 1;

%Restrição Aeq*X=beq
beq = 1;
Aeq = zeros(1,1+491+16);
Aeq(1,2+491:1+491+5) = 1;

%Definição limite inferior
lb = zeros(1+491+16,1);
lb(1)=-10000;

%Retorno esperado inicial
G = Retorno Mínimo;
i = 1;
gama =  $\Gamma$  (1,2,3,4,5);
```

```
%Loop para definir fronteira eficiente
while G <= Retorno máximo
```

```
%Dados para Restrição  $A \cdot X < B$ 
```

```
B = zeros(491+16,1);
B(491+16,1)= -G;
A = zeros(491+16,1+491+16);
A(1:491,1)= 1;
A(1:491,2:1+491) = eye(491);
A(1:491,2+491:1+491+5)= P;
A(491+1,491+2) = 1;
A(491+1,491+7) = 1;
A(491+2,491+2) = -1;
A(491+2,491+7) = 1;
A(491+3,491+3) = 1;
A(491+3,491+8) = 1;
A(491+4,491+3) = -1;
A(491+4,491+8) = 1;
A(491+5,491+4) = 1;
A(491+5,491+9) = 1;
A(491+6,491+4) = -1;
A(491+6,491+9) = 1;
A(491+7,491+5) = 1;
A(491+7,491+10) = 1;
A(491+8,491+5) = -1;
A(491+8,491+10) = 1;
A(491+9,491+6) = 1;
A(491+9,491+11) = 1;
A(491+10,491+6) = -1;
A(491+10,491+11) = 1;
A(491+11,498) = -s(1);
A(491+11,503) = 1;
A(491+11,508) = 1;
A(491+12,499) = -s(2);
A(491+12,504) = 1;
A(491+12,508) = 1;
A(491+13,500) = -s(3);
A(491+13,505) = 1;
A(491+13,508) = 1;
A(491+14,501) = -s(4);
A(491+14,506) = 1;
A(491+14,508) = 1;
A(491+15,502) = -s(5);
A(491+15,507) = 1;
A(491+15,508) = 1;
A(491+16,493:497)= r';
A(491+16,503:507)= -1;
A(491+16,508)= -gama;
A = -A;
```

```

%função minimização
[x,fval]=linprog(f,A,B,Aeq,beq,lb,[]);

%Matriz informações

C(i,1) = fval*100;
C(i,2) = x(1)*100;
C(i,3) = G;
C(i,4)= x(493);
C(i,5) = x(494);
C(i,6) = x(495);
C(i,7) = x(496);
C(i,8) = x(497);
C(i,9)=x(498);
C(i,10)=x(499);
C(i,11)=x(500);
C(i,12)=x(501);
C(i,13)=x(502);
C(i,14)=x(503);
C(i,15)=x(504);
C(i,16)=x(505);
C(i,17)=x(506);
C(i,18)=x(507);
C(i,19)=x(508);

G = G + 0.005;
i = i + 1;

end

xlswrite('C:\ResultCVarGama',C,5,'A2');

```